Examen d'analyse numérique

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit. La durée de l'examen est de 2h.

Exercice 1 Soit

$$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3, \\ 1 & 2 & 2 \end{matrix} \qquad y = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

1) Résoudre $Ax = y$ par la méthode du pivot.
2) Indiquer si A est décomposable sous forme LU et donner la décomposition si c'est le cas.

Exercice 2
1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible, $y \in \mathbb{R}^n$. Expliquer comment calculer les suites correspondant aux méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel.
On suppose désormais que A est tridiagonale, c'est-à-dire que

$$A_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j,\ i \neq j+1 \text{ ou } i \neq j-1,$$

et que sa diagonale est non nulle : $A_{ii} \neq 0$ pour tout i.
2) Indiquer (en justifiant) le nombre d'opérations, en $O(n)$ et en fonction du rayon spectral de la matrice correspondante, requises pour calculer $x = A^{-1}y$ par la méthode de Jacobi.
On applique maintenant la méthode du pivot pour le système $Ax = y$. On appelle $A^{(k)}$ la matrice obtenue après k étapes avec comme en cours la convention $A^{(0)} = A$.
3) Prouver par récurrence que $A^{(k)}$ vérifie

$$A^{(k)}_{ij} = 0 \quad \text{si } j \leq k \text{ et } i \neq j,\ j-1,$$
$$A^{(k)}_{ij} = A_{ij} \quad \text{si } j > k+1.$$

4) Donner le nombre d'opérations en $O(n)$ pour résoudre $Ax = y$ par la méthode du pivot si A est tridiagonale.

Exercice 3 Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in C([0,1])$. On pose

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(k/n) + f((k+1)/n)}{2n},$$

1) Rappeler les définitions de continuité et continuité uniforme.
2) Prouver que

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx - I_n \right| \leq \omega(1/n),$$

où ω est le module de continuité de f.
3) On suppose que $f \in C^3([0,\ 1])$. Prouver que

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx - I_n \right| = O(1/n^2).$$

Exercice 4 Soit la fonction

$$f(x) = 2x^2 - e^{x^2} + 1.$$

1) Tracer le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ en précisant le nombre et l'emplacement approximatif des racines (positives, négatives...).
2) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Décrire la méthode de Newton appliquée à x_0 et f. On appellera N_f la fonction intervenant dans la méthode.
3) Donner un développement limité de N_f à l'ordre 3 en $x = 0$.
4) En déduire qu'il existe $\eta > 0$ tq $N_f([-\eta,\ \eta]) \subset [-\eta, \eta]$.

5)* Soit $x_0 \in [-\eta,\ \eta]$, montrer que pour tout $r > 1/2$, il existe C tq la suite x_k définie par la méthode de Newton satisfait

$$|x_k| \leq Cr^k.$$

6) On suppose connu que $f(5) < 0$. On veut alors appliquer la méthode de dichotomie à l'intervalle $[-.1,\ 5]$. Vers quelle racine de f converge-t-on ?