MATHEMATIQUES L3 – 2006/2007
T.D. d'Analyse numérique
Feuille n°1

Exercice 1 : Soit $M = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer si M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser le cas échéant.

Exercice 2 : Résoudre l'équation $AX = Y$ par la méthode du pivot de Gauss, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et X est un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 : On note $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On définit les normes matricielles, subordonnées à des normes vectorielles, comme étant

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}.$$

On rappelle que les 3 normes usuelles sont

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,,\ ||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|\,,\ ||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Par ailleurs, le rayon spectral $\rho(A)$ d'une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est par définition

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i|\,;\ \lambda_i \textit{ valeurs propres de } A,\ i = 1, ..., n\}.$$

a) Montrer que $||A||_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

b) Montrer que $||A||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

c) Montrer que $||A||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$, où A^* est l'adjoint de A, i.e. $A^* =$.

Exercice 4 : Soient $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ les vecteurs de coordonnées respectives $(1;0;1)$, $(1;2;1)$, $(0;-1;2)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Après s'être assuré que la famille $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$, l'orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt.