

MATHEMATIQUES L3 – 2007/2008

T.D. d'Analyse numérique

Feuille 2

Exercice 1 Calculer le nombre d'opérations (additions et multiplications) nécessaires pour :

- 1) effectuer la somme de deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$;
- 2) effectuer le produit de deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$;
- 3) calculer le déterminant d'une matrice de $M_n(\mathbb{K})$, en utilisant le développement suivant les lignes ou les colonnes.

Exercice 2 Décomposition de Cholesky.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique $A^* = A$ et définie positive, soit

$$\sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} x_j > 0, \quad \text{pour tout } x = (x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

On veut montrer qu'il existe une unique matrice triangulaire inférieure L tq $l_{ii} > 0, \forall i$, et

$$A = L L^*.$$

- 1) Écrire A sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b_n \\ b_n^* & a_{nn} \end{pmatrix},$$

avec $b \in \mathbb{R}^n$, a_{nn} le coefficient correspondant de A et A_{n-1} une matrice de $M_{n-1}(\mathbb{R})$, symétrique, définie, positive.

- 2) Supposant que $A_{n-1} = L_{n-1} L_{n-1}^*$ avec L_{n-1} triangulaire inférieure et de diagonale positive. Trouver L que l'on cherchera sous la forme

$$L = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ c^* & \alpha_n \end{pmatrix},$$

pour obtenir une décomposition pour A .

- 3) Prouver par récurrence que toute matrice A symétrique, définie positive, admet une décomposition de Cholesky.
- 4) Ecrire l'algorithme permettant de calculer les coefficients de L en fonction de A .

Exercice 3 Décomposition LU par méthode du pivot de Gauss.

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

- 1) Décrire la suite des opérations sur les lignes pour mettre en place la méthode du pivot sur A .
- 2) En déduire la décomposition LU de A .
- 3) Même question avec

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sous-diagonales sont inversibles. Calculer le nombre d'opérations nécessaires pour décomposer A en LU .