MATHEMATIQUES L3 -2007/2008
T.D. d'Analyse numérique
Feuille 6

Exercice 1

a) On considère une fonction continue sur $[0,1]$, montrer que pour tout entier $n > 1$

$$| \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) | \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

On utilisera pour cela l'uniforme continuité de f sur $[0,1]$ et l'égalité suivante :

$$(*) \quad \int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx.$$

Généraliser à une somme de Riemann quelconque.

b) Erreur dans la méthode des rectangles à gauche.
Pour f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, montrer que pour tout entier $n > 1$

$$| \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) | \le \frac{\| f' \|_\infty}{2n} + O(\frac{1}{n^2}).$$

On commencera par écrire la formule de Taylor-Lagrange de f à l'ordre 2 en x au point $\frac{k}{n}$ pour $x \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$, puis on appliquera à nouveau la relation (*).

c) Erreur dans la méthode du point milieu.
De même pour f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,1]$, montrer que pour tout entier $n > 1$

$$| \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n} + \frac{1}{2n}) | \le \frac{\| f'' \|_\infty}{24n^2} + O(\frac{1}{n^3}).$$

Exercice 2

On considère le problème suivant :

$$y' = y, \; y(0) = 1.$$

On utilise la méthode d'Euler explicite avec un pas de temps h pour déterminer une solution approchée $\eta(t_j; h)$ de $y(t_j)$ où $t_j = jh$.

a) Ecrire explicitement $\eta(t_j; h)$ et $e(t_j; h) = \eta(t_j; h) - y(t_j)$.

b) Soit t fixé, et $h = \frac{t}{n}$. Montrer que l'erreur $e(t, h)$ tend vers zéro quand $n \to \infty$.