FEUILLE 3 D'ANALYSE NUMÉRIQUE

Exercice 1 Soit $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ une matrice à coefficients réels, symétrique, et définie positive. On rappelle qu'alors les valeurs propres de A sont réelles et > 0.
On cherche à résoudre

$$(1) \quad Ax = b,$$

avec $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur donné, par la méthode itérative

$$(2) \quad Bx^{(k+1)} + (A - B)x^{(k)} = b, \;\; k = 0, 1, 2, ...$$

avec $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur initial arbitraire.

1) Prenons $B = \frac{1}{\alpha}I, \;\; \alpha \in \mathbb{R}^*$. A quel intervalle appartient α pour que, quel que soit $x^{(0)}$, la suite $(x^{(k)})$ converge vers la solution de (1) ?

2) On note μ_i, $i = 1, 2, ..., n$ les valeurs propres de A, telles que

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_n.$$

On note $f_\alpha(\mu) = 1 - \alpha\mu$, $0 \leq \alpha \leq \frac{2}{\mu_n}$ et $\alpha_0 = \frac{2}{\mu_1 + \mu_n}$.
Vérifier que $f_{\alpha_0}(\mu_1) = -f_{\alpha_0}(\mu_n)$.
En déduire que α_0 minimise $\underset{1 \leq i \leq n}{max} \mid f_\alpha(\mu_i) \mid$, pour $\alpha \in [0, \frac{2}{\mu_n}]$.
On pose $B = \frac{1}{\alpha}I$. Pour quel α la convergence de (3) est elle la plus rapide ?

Exercice 2 On considère la matrice $n \times n$ tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & & & & \\ c & a & b & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & c & a & b \\ & & & & & c & a \end{pmatrix}$$

où a, b et c sont des scalaires réels ou complexes non nuls.

1) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2) Soit I=[0,1] et $h = \frac{1}{n+1}$, on pose $x_i = ih$ pour $i = 0, .., n + 1$.
Soit u, une fonction au moins 4 fois continûment dérivable sur I. Montrer par la formule de Taylor que

$$(1) \quad -u``(x_i) = \frac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})}{h^2} + O(h^2), \; i = 1, ..n.$$

On considère l'équation différentielle à valeurs au bord

$$\left\{ \begin{array}{l} -u"(x) \ = \ f(x), \ 0 < x < 1 \\ u(0) \ = \ u(1) \ = \ 0 \end{array} \right.$$

où f est une fonction donnée. En utilisant l'approximation de $-u''(x_i)$ donnée par l'expression (1) en omettant le terme en $O(h^2)$, montrer que les u_i, i=1,..,n, approximations de $u(x_i)$, sont solutions du système linéaire

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ . \\ . \\ . \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

On donnera l'expression de la matrice A.

3)Montrer explicitement que la méthode itérative de Jacobi appliquée au système précédent converge.

Exercice 3 Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ à diagonale fortement dominante :

$$\forall i \in \{1, .., n\} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mid a_{i,j} \mid \leq \mid a_{i,i} \mid$$

On considère un système linéaire de la forme $Ax = b$ où $b \in \mathbb{R}^n$.
Montrer en utilisant la norme $\|.\|_\infty$ que la méthode de Jacobi appliquée au système est convergente.
(On rappelle que pour $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ on a $\|M\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \mid m_{i,j} \mid$).

Exercice 4 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
1) Vérifier que A est symétrique définie positive.
2) Effectuer trois itérations de la méthode du gradient en partant de $x^0 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3) Soit $\mathcal{Q}(x) = \frac{1}{2} {}^t x.A.x - {}^t y.x$. Représenter graphiquement les lignes de niveau de $\mathcal{Q}$ ainsi que les vecteurs x^0, x^1, x^2, x^3.

Exercice 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$.
1) Appliquer la méthode de la puissance, et calculer μ_3. Comparer μ_3 avec la plus grande valeur propre de A.
2) Supposons que $x_1^0 = x_2^0$. Calculer μ_3 et conclure.