

MATHEMATIQUES L3 -2006/2007
T.D. d'Analyse numérique
Feuille 6

Exercice 1

- a) On considère une fonction continue sur $[0, 1]$, montrer que pour tout entier $n > 1$

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On utilisera pour cela l'uniforme continuité de f sur $[0, 1]$ et l'égalité suivante :

$$(*) \quad \int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx$$

Généraliser à une somme de Riemann quelconque.

- b) Erreur dans la méthode des rectangles à gauche.

Pour f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$, montrer que pour tout entier $n > 1$

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{\|f'\|_\infty}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On commencera par écrire la formule de Taylor-Lagrange de f à l'ordre 2 en x au point $\frac{k}{n}$ pour $x \in]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$, puis on appliquera à nouveau la relation (*).

- c) Erreur dans la méthode du point milieu.

De même pour f une fonction de classe \mathcal{C}^3 sur $[0, 1]$, montrer que pour tout entier $n > 1$

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{2n}\right) \right| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{24n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

- d) Suivant les mêmes idées trouver les formules d'erreurs pour la méthode du trapèze et la méthode de Simpson.

Exercice 2

On considère le problème suivant :

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

On utilise la méthode d'Euler explicite avec un pas de temps h pour déterminer une solution approchée $\eta(t_j; h)$ de $y(t_j)$ où $t_j = jh$.

- a) Ecrire explicitement $\eta(t_j; h)$ et $e(t_j; h) = \eta(t_j; h) - y(t_j)$.
b) Soit t fixé, et $h = \frac{t}{n}$. Montrer que l'erreur $e(t, h)$ tend vers zéro quand $n \rightarrow \infty$.