Examen de compléments d'analyse numérique

Aucun document n'est autorisé. La durée de l'examen est de 2h

Exercice 1 On n'utilisera pour cet exercice aucune des fonctions préprogrammées de scilab.
1) Écrire un programme $y = f(x)$ qui renvoit dans y la valeur $x - e^x$.
2) Écrire un programme $[an,\ bn] = dichotomie(a, b, n)$ qui retourne les bornes an et bn du n-ième intervalle obtenu par dichotomie à partir de l'intervalle $[a,\ b]$. On utilisera la fonction f définie à la question précédente.
3) Donner la complexité de la fonction dichotomie (nombre d'opérations en fonction de n). On justifiera.

Exercice 2 On n'utilisera pour cet exercice aucune des fonctions préprogrammées de scilab.
1) Écrire un programme $va = verification(A, n)$ qui renvoie la valeur 1 si la matrice A est triangulaire inférieure et 0 sinon.
2) Écrire un programme $x = substitution(A, y, n)$ qui renvoie la solution de $Ax = y$ dans le cas où A est triangulaire inférieure (attention cela n'est pas la fin de la méthode du pivot pour laquelle A serait triangulaire supérieure).
3) Donner la complexité des programmes écrits aux questions 1 et 2, en justifiant.

Exercice 3 On n'utilisera pour cet exercice aucune des fonctions préprogrammées de scilab à l'exception de la fonction racine carrée $sqrt$.
On désire implémenter la méthode de calcul d'intégrales suivante pour des fonctions positives

$$\int_0^1 f(x)\,dx \sim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{f(i/n)\times f((i-1)/n)}.$$

On suppose que les valeurs $f(i/n)$ pour i de 0 à n sont rentrées dans un vecteur fi (de taille $n+1$ donc) ; cela signifie que $f(i.n)$ est rentrée dans la coordonnée $i+1$ de fi.
1) Ecrire un programme $va = positif(fi, n)$ qui renvoie 1 si toutes les composantes du vecteur fi de taille $n+1$ sont positives.
2) Ecrire un programme $m = integrale(fi, n)$ qui calcule une valeur approchée de $\int_0^1 f(x)\,dx$ à l'aide de la méthode décrite plus haut.
3) Donner la complexité des deux programmes, en justifiant.

Exercice 4 On n'utilisera pour cet exercice aucune des fonctions préprogrammées de scilab à l'exception de la valeur absolue abs. On veut trouver numériquement une solution à l'équation

$$x'(t) = |x|, \quad x(0) = 1.$$

1) Programmer une fonction $un = eulerexplicite(n)$ qui renvoie la valeur de la n-ième itérée $u_n$par la méthode d'Euler explicite donnée par

$$n\ (u_{k+1} - u_k) = |u_k|, \quad u_0 = 1.$$

2) Ecrire un programme $un = eulerimplicite(n)$ qui renvoie la valeur de la n-ième itérée par la méthode d'Euler implicite.