Thèse de Doctorat
de l'Université Paris VI
Spcialité : Mathématiques
présentée par

Pierre-Emmanuel Jabin

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris VI

ÉQUATIONS DE TRANSPORT MODÉLISANT DES PARTICULES EN INTERACTION DANS UN FLUIDE ET COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES

Remerciements

En premier lieu, je voudrais exprimer ma gratitude à mon directeur de thèse, Benoît Perthame dont j'ai pu apprécier la valeur scientifique et les qualités humaines.
Je remercie chaleureusement P. Degond et F. Poupaud pour l'attention avec laquelle ils ont lu ma thèse.
Je suis également reconnaissant à Y. Brenier, L. Desvillettes, F. Golse et D. Lhuillier d'avoir bien voulu faire partie de mon jury.
Je tiens enfin à remercier tous ceux qui m'ont aidé à un moment ou un autre et notamment ma famille et tous les membres du département de mathématiques de l'École Normale Supérieure.

Résumé

Cette thèse consiste à étudier des modèles, principalement cinétiques, pour décrire les interactions de particules qui se déplacent dans un fluide. Ces interactions se font par le biais du fluide : une particule, en bougeant, déplace le fluide qui agit alors sur toutes les autres particules. Les particules sont supposées rigides et sphériques et le fluide est décrit par un écoulement de Stokes.

La première étape consiste à modéliser et simplifier les interactions pour arriver à “oublier” le fluide et à exprimer directement les forces qui s'exercent sur les particules en fonction de leurs position et vitesse uniquement. Cela permet d'obtenir une équation pour la fonction de distribution. La principale difficulté, pour obtenir des dérivations rigoureuses, est de contrôler la distance minimale entre les particules. En collaboration avec F. Otto, ce problème a pu être résolu pour des particules sans inertie mais reste ouvert pour la principale équation dérivée.

Il est ensuite possible d'étudier cette équation et diverses asymptotiques. À cause des effets dissipatifs dus au fluide, le comportement en temps grand sans forces extérieures fait ainsi apparaître une concentration en vitesse de la solution autour d'une masse de Dirac. Pour la même raison, la fonction de distribution devient aussi monocinétique lorsque l'inertie des particules tend vers zéro en présence d'un champ de pesanteur.

On peut s'intéresser à la régularité des solutions de l'équation par une méthode de propagation de moments en vitesse. Cette méthode permet d'ailleurs d'améliorer le résultat habituel pour le système de Vlasov-Poisson. Enfin se pose la question de l'existence de solutions à l'équation lorsque la densité macroscopique ne tend pas vers zéro à l'infini. L'approche proposée fonctionne dans le cas du système de Vlasov-Poisson mais semble difficile à généraliser à l'équation cinétique étudiée ici.

Abstract

This thesis consists in the study of models, mainly kinetic equations, which describe the interactions of particles moving in a fluid. The interactions are due to the fluid : as one particle moves, it pushes away the fluid which then influence all the other particles. The particles are supposed rigid and spherical and the fluid is described by the Stokes system.

The first step is to modelize and simplify these interactions in order to forget the fluid and to express the forces on the particles directly in terms of their positions. With this approximation, we can derive an equation for the distribution function of the particles. The main obstacle to rigourous derivations is to obtain a control on the minimum distance between any two particles. In collaboration with F. Otto, this has been shown for particles without inertia but it is unknown in the other cases.

After that, it is possible to study the kinetic equation we obtained for different asymptotic behaviours. Due to the dissipative effects of the fluid, in large time and without external force, the solution concentrates in velocity around a Dirac mass. For the same reason, the distribution function also becomes monokinetic when the inertia of the particles vanishes, and with a gravity field.

The regularity of the solution is interesting. It can be obtained by a method of propagation of moments which also gives better estimates for the Vlasov-Poisson system than what was obtained before. The last question is to try to get the existence of solutions, in a sense to be precised, to the equation with a constant and non zero macroscopic density at infinity. We propose a method which works well for Vlasov-Poisson but seems difficult to extend to the kinetic equation studied here.

Table des Matières

Introduction

Le plan de cette introduction suit le plan général de la thèse. La première partie présente la dynamique et les modèles obtenus dans la limite d'un nombre infini de particules. Deux asymptotiques particulières du modèle cinétique sont ensuite détaillées. La troisième partie traite de la régularité des solutions et de l'existence de solutions pour le système de Vlasov-Poisson lorsque masse et énergie sont infinies.

1 Modélisation

1.1 Cadre général

On considère la dynamique de N particules identiques, rigides et sphériques de rayon R en interaction dans un fluide. Tant que le nombre N est fini, cette dynamique peut se représenter par un système d'équations différentielles pour les particules, couplé à des équations aux dérivées partielles pour le fluide. On ne considérera pas ici le cas d'un écoulement dans un domaine borné, et plus précisémment on suppose que le fluide remplit tout l'espace (sauf le volume occupé par les particules). En ce qui concerne le cadre général, le cas d'un domaine plus restreint n'apporte que des modifications mineures dans les équations. Par contre, il compliquerait nettement les approximations dipolaires qui vont être faites, rendant d'ailleurs toute forme explicite impossible en général.

On se place en dimension 3, ce qui est la situation la plus réaliste physiquement. On note X_i les centres de chaque particules, V_i leur vitesse de translation et Ω_i leur vitesse de rotation. Les particules ont une masse m (leur densité sera notée ρ_p) et un moment d'inertie j. En dehors des effets dus au fluide, elles sont soumises à une force extérieure F_e. Le fluide est modélisé par ses champs de vitesse et de pression u et p, il a une densité ρ_f et une viscosité μ.

Le cas le plus général considéré habituellement est celui d'un fluide satisfaisant les équations de Navier-Stokes incompressible ou isentropique. Dans le cas incompressible, la dynamique s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l}
\rho_f \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u\right) + \nabla_x p = \mu \triangle_x u \ dans\ I\!R^3 - \bigcup_{i=1}^N B_i,\\
\mathrm{div}\ u = 0\ dans\ I\!R^3 - \bigcup_{i=1}^N B_i,\\
u|_{\partial B_i} = V_i + \Omega_i \wedge (x - X_i),\\
u(|x| = \infty) = 0,
\end{array}\right. \tag{1.1}$$

pour le fluide, couplée avec pour les particules (n étant la normale sortante aux sphères)

$$\begin{cases} \dot{X}_i = V_i, \\ m\dot{V}_i = F_i = F_e + \int_{\partial B_i}(\sigma \cdot n)dS, \\ j\dot{\Omega}_i = \Gamma_i = \Gamma_e + \int_{\partial B_i}(x - X_i) \wedge (\sigma \cdot n)dS, \\ \sigma = -pId + \mu(\nabla_x u + \nabla_x u^T). \end{cases} \tag{1.2}$$

La présence des particules influence le mouvement du fluide d'abord à cause des conditions aux limites au bord des sphères, ce qui reste assez facilement contrôlable. Mais les particules déterminent aussi le volume où vont être résolues les équations pour le fluide, ce qui est beaucoup plus ennuyeux et fait exploser les estimations sur les champs du fluide quand deux particules se rapprochent jusqu'à se toucher.

Il est toutefois possible d'étudier cette dynamique en gardant N constant. B. Desjardins et M. Esteban (voir [7]) ont ainsi montré qu'elle avait des solutions au moins jusqu'au temps de première collision entre particules, le résultat étant limité par les théorèmes d'existence habituels pour Navier-Stokes (si l'on travaille en dimension 3). On citera également les simulations numériques de la même dynamique par B. Maury et R. Glowinski (se reporter à [22] et [23]).

Afin de simplifier les constantes apparaissant, on supposera à partir de maintenant que la force extérieure est soit nulle, soit due à un champ de pesanteur e.

1.2 Approximation d'un écoulement de Stokes

Comme ce qui nous intéresse ici est la limite de cette dynamique quand N devient infini, on ne considérera que des écoulements de Stokes, stationnaires pour le fluide. Cette approximation est valable si le nombre de Reynolds de l'écoulement est petit, ce qui est le cas pour des petites particules suffisamment diluées. On remplace alors le système (1.1) par

$$\begin{cases} \nabla_x p = \mu \triangle_x u \ dans\ I\!R^3 - \bigcup_{i=1}^N B_i, \\ \mathrm{div}\ u = 0\ dans\ I\!R^3 - \bigcup_{i=1}^N B_i, \\ u|_{\partial B_i} = V_i + \Omega_i \wedge (x - X_i), \\ u(|x| = \infty) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Une simplification importante est que maintenant le fluide s'adapte instantanément à la disposition des particules (on pourra se reporter à [16] pour l'utilisation des équations de Stokes en mécanique des fluides). Cela signifie qu'il n'y a plus d'effets de retard dans les interactions entre les particules. Si l'on utilise le système (1.3), les équations pour le fluide ne posent plus de problème pour montrer l'existence de solutions à la dynamique couplée. Toutefois, le temps d'existence est toujours limité par les éventuelles collisions entre deux particules. Bien entendu si l'on néglige les effets d'inertie dans le fluide, la question se pose de savoir si l'on doit aussi négliger l'inertie des particules. Dans ce cas, le système (1.2) devient

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{X}_i = V_i, \\ 0 = me + \int_{\partial B_i} (\sigma \cdot n) dS, \\ 0 = \int_{\partial B_i} (x - X_i) \wedge (\sigma \cdot n) dS, \\ \sigma = -pId + \mu(\nabla_x u + \nabla_x u^T). \end{array}\right. \tag{1.4}$$

A chaque instant, la vitesse de chaque particule est alors une fonction de toutes leurs positions. Bien entendu cette approximation n'a d'intérêt que si la force extérieure qui s'exerce sur les particules n'est pas nulle. Dans le cas contraire, les vitesses de toutes les particules sont nulles. Les deux systèmes (1.3) et (1.4) sont utilisés par les mécaniciens des fluides notamment pour des calculs de vitesse de sédimentation de particules solides dans un liquide (voir en particulier [2], [9], et [17]). En effet dans ce cas, la densité des particules est comparable à celle du fluide.

On va travailler avec deux dynamiques couplées possibles : le système (1.3) couplé avec les systèmes (1.2) ou (1.4).

1.3 Approximation dipolaire

Les deux dynamiques considérées restent trop complexes pour pouvoir espérer passer à la limite sur le nombre de particules. En particulier, les interactions dépendent toujours de manière compliquée des positions de toutes les particules. En tenant compte de la linéarité du système (1.3), on va approcher les forces par une somme d'interactions à deux particules.

Notons $d(t)$ la distance minimale entre deux points X_i. On procède à une sorte de décomposition multipolaire des termes de force que l'on tronque à l'ordre R^2/d^2 (le premier chapitre donne plus de détails). Tenant compte de ce que l'ordre de grandeur des vitesses de rotation est celui des vitesses V divisé par R (si l'on veut que V_i soit du même ordre que $(x - X_i) \wedge \Omega_i$), on obtient

$$\begin{cases} F_i = -6\pi R\mu V_i + R^2\mu \sum_{j\neq i} A(X_i - X_j)\cdot V_j + me, \\ \Gamma_i = -8\pi R^2 \mu \Omega_i. \end{cases} \tag{1.5}$$

La matrice A est la fonction de Green du système de Stokes à une constante multiplicative positive près, c'est-à-dire la solution de

$$\begin{aligned} &\triangle u = \nabla p + K\delta(x) \ dans \ I\!R^3, \\ &\operatorname{div} u = 0 \ dans \ I\!R^3, \\ &u(|x| = \infty) = 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

On peut d'ailleurs donner une expression exacte pour A

$$A(x) = -\frac{9}{2}\pi \left(\frac{1}{|x|}\mathrm{Id} + \frac{x\otimes x}{|x|^3}\right). \tag{1.7}$$

On remarque immédiatement qu'avec l'approximation donnée par (1.5), la dynamique pour les vitesses de rotation devient triviale et totalement découplée des équations pour les positions et vitesses. En conséquence, on oubliera désormais ces vitesses de rotations.

Les équations pour les particules deviennent donc

$$\begin{cases} \dot{X}_i = V_i, \\ \dot{V}_i = -\frac{9}{2}\frac{\mu}{R^2\rho_p}V_i + \frac{3}{4\pi}\frac{\mu}{R^2\rho_p}R\sum_{j\neq i} A(X_i - X_j)\cdot V_j + e, \end{cases} \tag{1.8}$$

si l'on garde l'inertie des particules et sinon

$$\begin{cases} \dot{X}_i = V_i, \\ 0 = -6\pi\mu R V_i + \mu R^2 \sum_{j\neq i} A(X_i - X_j)\cdot V_j + me. \end{cases} \tag{1.9}$$

Ces équations sont maintenant autonomes et ne sont plus couplées avec une équation pour le fluide, ce qui était bien le but recherché. On peut encore signaler que cette approximation dipolaire revient à modéliser les particules par des forces ponctuelles proportionnelles à leurs vitesses.

En tout état de cause, cette approximation reste pour l'instant purement formelle et ne peut être envisagée que si la distance entre les sphères est beaucoup plus importante que leur rayon.

1.4 Équations pour la fonction de distribution

Cas des particules avec inertie

Pour décrire la dynamique (1.8), où les X_i et les V_i sont donnés au départ, quand N devient infini, on va chercher à écrire une équation sur la fonction de distribution des particules dans l'espace des phases. À N fixé, on définit donc

$$f_N(t,x,v) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta(x - X_i(t))\delta(v - V_i(t)). \tag{1.10}$$

Remarquons maintenant que en posant $A(0)$

$$\sum_{j\neq i} A(X_i - X_j)\cdot V_j = NA\star j_N, \tag{1.11}$$

où j_N est le courant macroscopique associé à f_N soit

$$j_N = \int_{\mathbb{R}^3} v f_N dv. \tag{1.12}$$

La fonction f_N est ainsi solution de

$$\partial_t f_N + v\cdot\nabla_x f_N + \mathrm{div}((\eta_N A\star j_N - \lambda_N v + e)f_N) = 0, \tag{1.13}$$

avec

$$\begin{array}{l} \lambda_N = \frac{9}{2}\frac{\mu}{R^2\rho_p} \\ \eta_N = K\lambda_N NR. \end{array} \tag{1.14}$$

En supposant que ces quantités ont une limite quand N tend vers l'infini, toute limite f de f_N satisfait formellement l'équation cinétique

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f + v\cdot\nabla_x f + \mathrm{div}((\eta A\star j - \lambda v + e)f) = 0, \\ j(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} v f(t,x,v)dxdv, \\ f(t=0,x,v) = f^0(x,v). \end{array} \right. \tag{1.15}$$

Cette équation modélise la dynamique des particules dans la limite N infini. Malheureusement, on ne sait pas pour l'instant prouver rigoureusement cette dérivation sauf dans le cas où la matrice A serait régulière (continue par exemple, voir [30] pour ce genre de questions). En utilisant le fait que A est la fonction de Green des équations de Stokes, on peut aussi écrire (1.15) comme

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t f + v\cdot\nabla_x f + \mathrm{div}((\lambda(u-v)+e)f) = 0,\\ \frac{\lambda}{\eta}\triangle u = \nabla_p + j,\\ \mathrm{div}\ u = 0,\\ u(|x|=\infty) = 0,\\ j(t,x) = \int_{I\!R^3} vf(t,x,v)dxdv,\\ f(t=0,x,v) = f^0(x,v).\end{array}\right. \tag{1.16}$$

Particules sans inertie

La procédure suivie est la même que pour les particules avec inertie. On définit les deux distributions

$$\begin{array}{l}\rho_N(t,x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta(x - X_i(t)),\\ j_N(t,x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta(x - X_i(t)).\end{array} \tag{1.17}$$

Elles vérifient le système suivant

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t\rho_N + \mathrm{div}j_N = 0,\\ \lambda_N j_N = (\eta_N A\star j_N + e)\rho_N.\end{array}\right. \tag{1.18}$$

Il est important de noter ici qu'à cause de la négativité de A en tant qu'opérateur de convolution, la deuxième équation définit bien uniquement j_N. Avec les mêmes échelles (1.14) que précédemment et toujours seulement formellement, on obtient pour les limites ρ et j

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t\rho + \mathrm{div}j = 0,\\ \lambda j = (\eta A\star j + e)\rho,\\ \rho(t=0,x) = \rho^0(x).\end{array}\right. \tag{1.19}$$

Comme précédemment, on peut aussi écrire (1.19) comme

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0,\\ \frac{\lambda}{\eta}\triangle u = \nabla p + j,\\ \mathrm{div}\ u = 0,\\ u(|x|=\infty) = \frac{e}{\lambda},\\ \rho(t=0,x) = \rho^0(x).\end{array}\right. \tag{1.20}$$

Bilan des échelles physiques, exemple d'application

On a obtenu les équations (1.15) ou (1.19) sous différentes conditions. La première est que le nombre de Reynolds du fluide est petit. Les conditions (1.14) sont valables pour un nuage de particules de taille caractéristique et une échelle de temps 1. Pour le cas général, les particules ont une taille caractéristique $\xi = dN^{1/3}$ et une dynamique selon une échelle de temps $\tau = \xi/V$. La vitesse crée par une particule dans le fluide étant de l'ordre de $V_i R/|x - X_i|$, on obtient finalement les conditions pour (1.15)

$$\begin{array}{l} Rey = \frac{\rho_f V R}{\mu} << 1, \\ \frac{\tau\mu}{R^2\rho_p} = \frac{\mu d N^{1/3}}{R^2 V \rho_p} = const, \\ \frac{RN^{2/3}}{d} = const. \end{array} \qquad (1.21)$$

Dans le cas de particules sans inertie, le facteur d'échelle du champ de pesanteur $|e|$ détermine l'échelle des vitesses $V = \rho_p R^2 |e|/\mu$. Il faut remplacer la deuxième condition par une condition imposant que le temps de relaxation des particules vers les vitesses données par (1.19) est beaucoup plus petit que l'échelle de temps caractéristique. Ce temps de relaxation étant de l'ordre de $\rho_p R^2/\mu$, on trouve

$$\begin{array}{l} Rey = \frac{\rho_f \rho_p R^3 |e|}{\mu^2} << 1, \\ \frac{\tau\mu}{R^2\rho_p} = \frac{\mu^2 d N^{1/3}}{\rho_p^2 R^4 |e|} >> 1, \\ \frac{RN^{2/3}}{d} = const. \end{array} \qquad (1.22)$$

Bien entendu, ces conditions sont à prendre à titre purement indicatif. Elles permettent cependant de savoir à peu près quels cas concrets peuvent être modélisés par (1.15) ou (1.19).

Prenons par exemple le cas d'un nuage de quelques mètres formé de petites gouttes d'eau (de 10 microns environ) dispersées dans l'air que l'on regarde pendant quelques dizaines de secondes. La taille des gouttes est suffisamment petite pour qu'elles soient effectivement sphériques et rigides. Les paramètres physiques sont les suivants

$$\begin{array}{l} \rho_f = 1 kg.m^{-3}, \quad \mu = 10^{-5} kg.m^{-1}.s^{-1}, \quad N = 10^6, \\ \rho_p = 10^3 kg.m^{-3}, \quad R = 10^{-5} m, \quad d = 10^{-2} m, \quad V = 0.1 m.s^{-1}. \end{array} \qquad (1.23)$$

Regardons ce que donnent les conditions (1.21) dans cette situation. Le nombre de Reynolds du fluide vaut 0.1, la deuxième constante dans (1.21)

10^3 et la dernière vaut 10. Excepté pour la deuxième, elles sont à peu près vérifiées. Dans le cas de (1.22), le nombre de Reynolds vaut 0.1 et la valeur correspondant à la deuxième condition, 10^3, étant supérieure à 1. Cette situation est intéressante car on s'attend à ce que le comportement des particules passe du système (1.15) au système (1.19) au cours du temps.

1.5 Vers des dérivations rigoureuses

Le problème d'une dérivation rigoureuse du système (1.15) ou (1.19) est très délicate. Dans le cas de (1.15), même en supposant que l'approximation dipolaire est vraie, on n'a aucun résultat. En fait avec cette approximation, la question est proche de celle d'une dérivation rigoureuse du système de Vlasov-Poisson.

Que l'on néglige l'inertie des particules ou non, le principal obstacle est de s'assurer que les échelles choisies au départ seront préservées au cours de l'évolution en temps.Ce ne peut être le cas que si beaucoup de particules ne peuvent pas se rapprocher beaucoup plus qu'elles ne l'étaient au départ.

Dans le cas de particules sans inertie, un résultat obtenu avec F. Otto répond à cette question. On considère la dynamique (1.4) couplée avec (1.3) et on note $d(t)$ la distance minimale entre deux particules et $V(t)$ le supremum des $|V_i(t)|$. On alors

Theorem 1.1 *Supposons qu'il existe une constante C telle que, quand N tend vers l'infini*

$$R \to 0, \quad \frac{R}{d(0)} \to 0, \quad \frac{RN^{2/3}}{d(0)} \leq C, \quad V(0)\frac{\mu}{\rho_f R^2} \leq C. \tag{1.24}$$

Alors il existe N_0, une constante K et un temps $T \geq KC^{-2}$ tels que, pour $N > N_0$

$$V(t) \leq KV(0), \quad d(t) \geq \frac{1}{2}d(0) \quad \forall t \in [0,\ T]. \tag{1.25}$$

Si l'on suppose en plus l'approximation dipolaire, ce théorème permet de dériver immédiatement le système (1.19). Sans approximation dipolaire et dans un régime très dilué $RN^{2/3}/d \to 0$, il permet de montrer qu'à la limite, les particules se déplacent comme si elles étaient seules dans le fluide.

On espère arriver à prouver avec ce théorème que la dynamique couplée, sans approximation dipolaire et avec les bonnes échelles, a pour limite un système de la forme de (1.19).

1.6 Un autre modèle cinétique

On utilise couramment un autre modèle cinétique (voir [15] pour l'existence de solutions)

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t f + v\cdot\nabla_x f + \lambda \mathrm{div}((u-v)f) = 0,\\ \partial_t u - \triangle u = \nabla p + \eta(j-\rho u),\\ \mathrm{div}\ u = 0,\\ u(|x|=\infty) = 0,\\ \rho(t,x) = \int f(t,x,v)dv, \quad j(t,x) = \int v f(t,x,v)dv.\end{array}\right. \tag{1.26}$$

Ce modèle est dérivé en supposant que les particules sont dans un fluide ambiant de champ de vitesse u et qu'elles ne voient que le fluide et pas les autres particules. La force qui s'exerce sur chacune d'elle est alors un simple frottement $u-v$. On suppose ensuite que le fluide vérifie une équation de Stokes instationnaire (cela pourrait être Navier-Stokes ou Stokes stationnaire) dans tout l'espace mais avec des termes sources. On détermine ceux-ci à l'aide du principe d'action-réaction qui veut que la force exercée par les particules sur le fluide soit l'opposée de la force exercée par le fluide sur les particules, en tenant compte des échelles différentes (macroscopique pour le fluide, microscopique pour les particules).

Le système (1.26) est un peu plus compliqué que le système (1.15) bien qu'il modélise moins précisément les interactions entre particules. Il est surtout utile lorsque le fluide a un mouvement propre qui n'est pas dû aux particules. On pourrait en fait parfaitement écrire l'équivalent du système (1.15) dans un flot ambiant non nul. Dans la suite, on ne considérera cependant que le système (1.15) puisque l'on n'est pas intéressé par un mouvement propre du fluide.

2 Description de deux asymptotiques

Cette partie résume les résultats obtenus pour la limite en temps grand de système (1.15) et la limite du système (1.15) vers le système macroscopique (1.19). L'existence de solutions faibles pour le système (1.15) est rappelé dans le premier paragraphe mais ne pose pas de problème particulier (l'obtention de solutions plus régulières est détaillée dans la partie suivante).

2.1 Limite en temps grand sans force extérieure

Dans tout ce paragraphe, on va supposer que le champ de pesanteur e est nulle. On explique d'abord les propriétés de dissipation d'énergie du système (1.15), on peut ensuite donner les résultats d'existence de solution et de limite en temps grand.

Dissipation d'énergie

La dynamique couplée (1.2) et (1.3) dissipe l'énergie cinétique des particules à cause, bien entendu, des effets visqueux du fluide. On peut montrer qu'en l'absence de forces extérieures, on a

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}|V_i|^2 = -\mu \int_{\mathbb{R}^3 - \cup B_i} |\nabla u + \nabla u^T|^2 dx \leq 0. \tag{2.1}$$

Cette propriété est conservée par l'équation cinétique. Dans ce cas on définit l'énergie cinétique par

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f(t,x,v)dxdv. \tag{2.2}$$

En utilisant le système (1.15), on trouve formellement la relation

$$\frac{d}{dt}E(t) = -2\lambda E(t) + \eta \int j\cdot (A\star j)dx. \tag{2.3}$$

Comme l'opérateur de convolution associé à A est négatif, on obtient la relation

$$E(t) \leq E(0)e^{-2\lambda t}. \tag{2.4}$$

Concentration en temps grand

En plus de la dissipation de l'énergie, le système (1.15) vérifie les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} &\|f(t,.,.)\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} \leq \|f^0\|_{L^1(\mathbb{R}^6)}, \\ &\|f(t,.,.)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)} \leq e^{3\lambda t}\|f^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Avec ces estimations et des techniques ressemblant à celles utilisées pour les solutions faibles de Vlasov-Poisson (voir [1] et [8]), on peut prouver le théorème suivant

Theorem 2.1 *(Existence de solutions faibles) On suppose que* $f^0 \in L^1 \cap L^\infty$ *et que* $E(0) < \infty$*. Alors il existe* $f \in L^\infty([0,\ T], L^1 \cap L^\infty)$ *solution au sens des distributions de (1.15), qui vérifie les estimations (2.4) et (2.5), continue en temps à valeur* L^1 *et telle que*

$$\partial_t \rho + divj = 0. \tag{2.6}$$

La dissipation exponentielle d'énergie permet ensuite de montrer que la solution se concentre comme une masse de Dirac en vitesse.

Theorem 2.2 *(Limite en temps grand) Sous les hypothèses du théorème 2.1, on a quand* t *tend vers l'infini*

$f(t,x,v) \longrightarrow \bar{\rho}(x)\delta(v)$ *dans* $w - M^1(I\!R^6)$ *(topologie faible des mesures de Radon),*

$\rho(t,x) \longrightarrow \bar{\rho}(x)$ *dans* $w - L^p(I\!R^3)$ *pour* $1 \leq p \leq 5/3$.

Ce théorème est en fait vrai pour des équations plus générales. On pourra se reporter au chapitre 3 pour plus de détails.

Limite en présence d'une force extérieure

Il est naturel de se demander si le même type de résultat est vrai si le champ de pesanteur n'est plus nul. Bien entendu, on ne s'attend plus à une concentration autour des vitesses nulles mais il pourrait quand même exister une vitesse limite qui ne soit pas zéro.

Les techniques utilisées dans le cas sans pesanteur ne permettent cependant pas de le montrer. Afin de se forger une intuition dans ce cas, nous avons réalisé un code numérique fondé sur une méthode de particules et conduit des simulations numériques de la solution de l'équation avec gravité. Ces simulations suggèrent qu'il n'y a pas de vitesse limite. Le comportement observé est assez complexe et ne semble pas devenir stationnaire même dans le cas de moyenne en temps ou en espace.

2.2 Limite macroscopique

On a vu dans la partie modélisation que le système (1.19) représente une dynamique sans inertie des particules. Ce système peut aussi être obtenu directement comme une limite macroscopique du modèle cinétique (1.15).

Si l'on impose dans la dynamique à l'accélération des particules (les $\dot{V}_i$) d'être d'ordre ϵ, on trouve à la limite à la place de (1.15)

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f_\epsilon + v \cdot \nabla_x f_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\mathrm{div}((\eta A \star j_\epsilon - \lambda v + e) f_\epsilon) = 0, \\ j_\epsilon(t,x) = \int_{I\!R^3} v f_\epsilon(t,x,v)\,dxdv, \\ f_\epsilon(t=0,x,v) = f^0(x,v). \end{array} \right. \tag{2.7}$$

La limite formelle de ce système quand ϵ tend vers zéro est exactement le système (1.19) pour les limites ρ et j de ρ_ϵ et j_ϵ. Ce résultat n'a pu être prouvé rigoureusement que si l'on suppose A régulière.

Le système (2.7) préserve en effet la norme L^1 de f_ϵ et on peut voir assez facilement que l'énergie cinétique reste également bornée uniformément en ϵ. Toutefois la norme L^∞ des f_ϵ explose exponentiellement en ϵ. Par conséquent, on n'a que des estimations mesures pour f_ϵ, ρ_ϵ ou j_ϵ. Ces estimations ne permettent de donner un sens aux termes non-linéaires de la forme $(A \star j_\epsilon)\rho_\epsilon$ que si A appartient à C_0. Dans ce cas on peut montrer

Theorem 2.3 *Soit f_ϵ une suite de fonctions solutions de (2.7) pour une donnée initiale f^0 dans $L^1 \cap L^\infty$ et d'énergie bornée. Alors on peut trouver une sous-suite telle que quand ϵ tend vers zéro*
(i) $\rho_\epsilon \to \rho$, $j_\epsilon \to j$ dans $L^\infty([0,\ T], M^1(I\!R^3))$ faiblement avec ρ et j solutions de (1.19),
(ii) $\int_{I\!R^6} |\lambda v - e - \eta A \star j_\epsilon|^2 f_\epsilon dxdv \to 0$ dans $C([t^*, T])$ pour tout $t^* > 0$,
(iii) si $A \in W^{1,\infty}$ alors $f_\epsilon \to \rho(x)\delta(\lambda v - e - \eta A \star j)$ dans $L^\infty([0,\ T], M^1(I\!R^3))$ faible.

Des limites macroscopiques de ce genre, qui sont dues à des champs forts et non à des collisions locales, commencent à être étudiées. Ce résultat est à rapprocher des travaux sur les limites quasi-neutres des plasmas ou sur les limites du système de Vlasov-Poisson avec un champ magnétique fort. On citera notamment les articles de Y. Brenier [4], E. Grenier [14], E. Frénod et E. Sonnendrcker [10] et F. Golse et L. Saint-Raymond [12].

Le théorème 2.3 est notamment intéressant parce qu'il fait apparaître une concentration en vitesse pour une donnée initiale non préparée, c'est-à-dire parfaitement régulière. Ce phénomène est bien entendu dû au terme de frottement.

La principale limitation de ce résultat est l'hypothèse de régularité sur la matrice A. Celle-ci est absolument nécessaire à la preuve mais relativement troublante, en effet le système limite (1.19) propage sans difficulté la régularité initiale sur ρ comme le montre le théorème suivant

Theorem 2.4 *Pour tout $\rho^0 \in L^1 \cap L^{3/2}$, le système (1.19) admet un couple de solutions, au sens des distributions, ρ et j dans $L^\infty([0,\ T], L^1(\mathbb{R}^3))$. De plus si ρ^0 appartient à $W^{1,3}$, cette solution est unique globalement en temps.*

Pour étendre le théorème 2.3, il faudrait montrer que bien que f_ϵ explose en norme L^∞, cette explosion se limite à l'espace des vitesses de sorte que ρ_ϵ et j_ϵ restent régulier. Le problème principal vient du terme de transport qui a tendance à propager dans l'espace l'effet de concentration en vitesse dû au terme de frottement.

3 Problèmes d'existence et de régularité

3.1 Solutions fortes pour les systèmes de Vlasov-Stokes et Vlasov-Poisson

L'existence de solutions fortes sera envisagée ici du point de vue de la propagation des moments en vitesse. Pour le système (1.15), cette propagation est triviale losque A est la fonction de Green du problème de Stokes car alors

$$\int |\nabla_x A \star j|^2 dx \leq K \int j \cdot (A \star j) dx \ \in L^1([0,\ T]), \tag{3.8}$$

car l'énergie cinétique est dissipée. Cette estimation H^1 en temps et espace pour le terme de force est suffisante pour propager tous les moments en vitesse.

Cependant, il est préférable d'obtenir des solutions régulières pour des matrices A plus générales, avec une singularité plus forte à l'origine. L'estimation précédente ne peut alors plus fonctionner.

Le système (1.15) ressemble beaucoup au système de Vlasov-Poisson qui est le suivant

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_x U \cdot \nabla_v f = 0, \\ \triangle U = \alpha \rho(t,x), \\ \rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v) dv, \\ f(t=0,x,v) = f^0(x,v). \end{cases} \tag{3.9}$$

Pour ce système, l'existence de solutions fortes a été étudiée notamment par J. Batt et G. Rein ([3]), E. Horst ([19]), K. Pfaffelmoser ([25]) et J. Schaeffer ([29]) en contrôlant les caractéristiques. P.L. Lions et B. Perthame ([20]) ont simultanément démontré un résultat plus fort en prouvant que les moments en vitesse $M_k = \int |v|^k f dxdv$ étaient propagés pour $k > 3$. On ne savait pas si les moments d'ordre $2 < k \le 3$ étaient aussi propagés. En utilisant des lemmes de moments développés dans [11] et [21], I. Gasser, B. Perthame et moi-même avons pu montrer que c'était le cas et plus précisémment

Theorem 3.1 *(Vlasov-Poisson) Supposons que $f^0 \in L^\infty$ et que pour un réel $k > 2$, on a*

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^6} (1 + |v|^k + |x|^{\frac{1}{3}+0}) f^0(x,v) < \infty, \\ &\rho^0(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} f^0(x - vt, v) dv \in L^1_{loc}([0,\ \infty[\ , L^{3(k+3)/(k+6)}(\mathbb{R}^3)). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Alors il existe une solution f de (3.9) telle que

$$\int_{\mathbb{R}^6} (1 + |v|^k + |x|^{\frac{1}{3}+0}) f(t,x,v) dxdv \in L^\infty([0,\ T]). \tag{3.11}$$

Le même résultat peut se démontrer pour le système (1.15) avec une matrice A dont la singularité à l'origine est d'ordre $1/|x|^\beta$. On prouve que

Theorem 3.2 *(Vlasov-Stokes) Supposons que $0 \le \beta < 8/5$, que $f^0 \in L^\infty$ et que pour un réel $k > 2$, on a*

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^6} (1 + |v|^k + |x|^2) f^0(x,v) dxdv < \infty, \\ &j^0(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} |v| f^0(x - vt, v) dxdv \in L^1_{loc}([0,\ \infty[\ , L^p(\mathbb{R}^3)), \\ &avec\ \tfrac{1}{p} \le \tfrac{k+5}{k+4} - \tfrac{\beta}{3}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Il existe alors une solution f au système (1.15) telle que

$$\int_{\mathbb{R}^6} (1 + |v|^k + |x|^2) f(t,x,v) dxdv \in L^\infty([0,\ T]). \tag{3.13}$$

3.2 Solutions de Vlasov-Poisson de masse et énergie infinies

Lorsque les mécaniciens des fluides calculent la vitesse de sédimentation d'un nuage de particules (voir [2], [9] et [17]), ils supposent systématiquement que le nuage s'étend jusqu'à l'infini. Il se pose ainsi la question d'arriver à donner rigoureusement un sens au système (1.15) lorsque la densité macroscopique ρ tend vers une constante non nulle à l'infini.

Comme le système (1.15) est assez proche du système de Vlasov-Poisson (3.9), j'ai commencé par considérer ce problème pour Vlasov-Poisson. Il semble cependant que les résultats obtenus pour Vlasov-Poisson ne puissent pas se généraliser au système (1.15).

Le problème pour le système de Vlasov-Poisson est néanmoins intéressant par lui-même. Lorsque l'on est intéressé par ce qui se passe près de l'origine dans un domaine borné mais grand, il est utile de pouvoir modéliser la solution dans le reste du domaine par une fonction homogène de densité macroscopique constante.

Des équations cinétiques avec masse et énergie infinies ont déjà été étudiée, notamment par S. Mischler et B. Perthame ([24]) pour Boltzmann et par F. Castella ([6]) pour Vlasov-Poisson. Mais dans ce dernier cas par exemple, l'énergie est remplacée par le moment d'ordre deux en espace. Ici, aucun moment en espace ou en vitesse n'est fini. La difficulté est alors due à l'équation de Poisson. En effet, si ρ ne décroit pas à l'infini, on a une infinité de solutions à cette équation et l'on ne peut pas différencier entre elles. On va ici suivre une démarche courante en astrophysique et utilisée par exemple par G. Rein et A.D. Rendall (voir [26]). E. Caglioti, C. Marchioro et M. Pulvirenti (voir [5] ont récemment obtenu des résultats intéressants pour un problème similaire. Bien qu'ils ne puissent pas traiter des champs à longue portée comme Vlasov-Poisson, leur approche permet de considérer toute solution localement bornée et pas seulement des densités macroscopiques constantes à l'infini.

On décompose la solution en une fonction homogène $F(a(t)x + b(t)v)$ et une perturbation f. On choisit alors a priori que la solution de l'équation de Poisson (deuxième équation de (3.9)) avec une constante $c(t)$ comme second membre est $\alpha c(t)x^2/2$ (c'est par exemple le potentiel crée à l'intérieur d'une boule de densité de charge $c(t)$). Si l'on suppose que F est d'intégrale 1, la fonction homogène doit vérifier le système suivant

$$\partial_t F(ax+bv) + v \cdot \nabla_x F(ax+bv) + \frac{\alpha}{b^3} x \cdot \nabla_v F(ax+bv) = 0. \tag{3.14}$$

Cette équation implique le système différentiel suivant pour a et b

$$\dot{a} + \frac{\alpha}{b^2} = 0, \quad \dot{b} + a = 0. \tag{3.15}$$

La perturbation f, que l'on peut supposer intégrable en vitesse et en espace, doit alors satisfaire au système

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + (\frac{\alpha}{b^3} + \nabla_x V) \cdot \nabla_v f = -\nabla_x V \cdot \nabla_v F(ax+bv), \\ \triangle V = \alpha\rho, \\ \rho(t,x) = \int_{I\!R^3} f(t,x,v) dv, \\ f(t=0,x,v) = f^0(x,v). \end{array} \right. \tag{3.16}$$

Il est très simple de prouver que le système (3.15) admet des solutions mais difficile de montrer que le système (3.16) a des solutions (même faibles). Cela est dû au terme source dans (3.16) qui implique entre autre que f ne peut pas avoir de signe. L'estimation L^1 habituelle pour f n'est plus valable. D'autre part, le terme source a la même décroissance en espace que le champ de force E. Or toutes les estimations habituelles donnent au champ E une décroissance plus lente que la solution f dont il est issue. C'est ce problème, combiné au caractère non linéaire de l'équation, qui n'a permis d'obtenir que des solutions en temps petit.

Theorem 3.3 *Supposons que sur $[0,\ T]$ le système (3.15) admet des solutions a et b, que $F \in L^\infty(I\!R^3)$, $f^0 \in L^\infty(I\!R^6)$ et que pour un $k > 5$*

$$\begin{array}{l} (1+|\xi|^k)\nabla F \in L^1(I\!R^3), \quad E^0 \in L^2(I\!R^3), \\ \int_{I\!R^6} (1+|a(0)x+b(0)v|^k)|f^0|^2(x,v) dx dv < \infty. \end{array} \tag{3.17}$$

Alors il existe un temps $t^* > 0$ et $f \in L^\infty([0,\ t^*], L^2 \cap L^\infty)$ une solution au sens des distributions de (3.16) telle que

$$E(t,x) \in L^\infty([0,\ t^*], L^2(I\!R^3)), \quad \int_{I\!R^6} |ax+bv|^k |f|^2 dx dv \in L^\infty([0,\ T]). \tag{3.18}$$

Sans le terme non linéaire en $E\cdot\nabla_v f$, on pourrait choisir $t^* = T$ (existence en temps grand). Même en temps petit, la question de la propagation de la norme L^1 de f n'est pas clair.

Cependant la régularité des solutions n'est pas beaucoup plus difficile que pour une simple équation de Vlasov-Poisson. On peut ainsi obtenir la propagation de moments de la forme $\int |ax+bv|^k |f|$ avec $k > 3$ pour le système (3.16) pourvu que l'on ait déjà une estimation L^1 pour f et E. On utilise la méthode originelle de P.L. Lions et B. Perthame ([20]), les techniques développées avec I. Gasser et B. Perthame ne pouvant pas s'appliquer. On a besoin en plus d'une condition sur les caractéristiques liées à l'équation (3.14) (on pourra se reporter au dernier chapitre pour plus de précisions).

Bibliographie

[1] A.A. Arsenev, *Global existence of a weak solution of Vlasov's system of equations*, U.S.S.R. Comp. Math. and Math. Phys., 15, pp 131–141, 1975.

[2] G.K. Batchelor et C.S. Wen, *Sedimentation in a dilute dispersion of spheres*, J. Fluid Mech, 52, pp 245–268, 1972.

[3] J. Batt et G. Rein, *Global classical solutions of the periodic Vlasov-Poisson system in three dimensions*, C.R. Acad. Sci. Paris, 313, pp 411–416, 1991.

[4] Y. Brenier, *Convergence of the Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler equations*, à paraître dans Comm. P.D.E.

[5] E. Caglioti, C. Marchioro et M. Pulvirenti, *Non-equilibrium dynamics of three-dimensional infinite particle system*, à paraître dans Comm. Math. Phys.

[6] F. Castella, *Propagation of space moments in the Vlasov-Poisson equation and further results*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 16, pp 503–533, 1999.

[7] B. Desjardins et M. Esteban, *On weak solutions for fluid-rigid structure interaction : compressible and incompressible models*, à paraître dans Comm. P.D.E.

[8] R. DiPerna et P.L. Lions, *Solutions globales d'équations du type Vlasov-Poisson*, C.R. Acad. Sci. Paris, 307, pp 655–658, 1988.

[9] F. Feuillebois, *Sedimentation in a dispersion with vertical inhomogeneities*, J. Fluid Mech., 139, pp 145–172, 1984.

[10] E. Frénod et E. Sonnendrcker, *Long time behaviour of the two-dimensional Vlasov equation with a strong external magnetic field*, rapport de l'INRIA 3428, 1998.

[11] I. Gasser, P.A. Markowich et B. Perthame, *Dispersion and moments lemmas revisited*, J. Diff. Eq., 156, pp254–281, 1999.

[12] F. Golse et L. Saint-Raymond, *The Vlasov-Poisson system with strong magnetic field in quasineutral regime*, preprint.

[13] J. Goodman, T.Y. Hou et J. Lowengrub, *Convergence of the point vortex method for the 2-D Euler equations*, Comm. Pure Appl. Math., 43, pp 415–430, 1990.

[14] E. Grenier, *Defect measures of the Vlasov-Poisson system*, Comm. P.D.E., 21, pp 363–394, 1996.

[15] K. Hamdache, *Global existence and large time behaviour of solutions for the Vlasov-Stokes equations*, Japan J. Indust. Appl. Math., 15, pp 51–74, 1998.

[16] J. Happel et H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics* , Prentice-Hall, 1965.

[17] E.J. Hinch, *An averaged equation approach to particle interactions in a fluid suspension*, J. Fluid Mech., 83, pp 695–720, 1977.

[18] H. Herrero, B. Lucquin-Desreux et B. Perthame, *On the motion of dispersed bubbles in a potential flow- a kinetic description of the added mass effect*, to appear SIAM J. Appl. Math.

[19] E. Horst, *On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear Vlasov equation*, Math. Meth. Appl. Sci., 3, pp 229–248, 1981 et 4, pp 19–32, 1982.

[20] P.L. Lions et B. Perthame, *Propagagtion of moments and regularity for 3-dimensional Vlasov-Poisson system*, Invent. Math., 105, pp 415–430, 1991.

[21] P.L. Lions et B. Perthame, *Lemmes de moments, de moyenne et de dispersion*, C.R. Acad. Sci. Paris, 314, pp 801–806, 1992.

[22] B. Maury, *Direct simulations of 2D fluid-particle flows in biperiodic domains*, J. Comput. Phys., 156, pp 325–351, 1999.

[23] B. Maury et R. Glowinski, *Fluid particle flow : a symmetric formulation*, C.R. Acad. Sci. Paris, 324, pp 1079–1084, 1997.

[24] S. Mischler et B. Perthame, *Boltzmann equation with infinite energy : renormalized solutions and distributional solutions for small initial data and initial data close to a Maxwellian*, SIAM J. Math. Anal., 28, pp 1015–1027, 1997.

[25] K. Pfaffelmoser, *Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data*, J. Diff. Eq., 95, pp 281–303, 1992.

[26] G. Rein et A.D. Rendall, *Global existence of classical solutions to the Vlasov-Poisson system in a three dimensional cosmological setting*, Arch. Rational Mech. Anal., 126, pp 183–201, 1994.

[27] J. Rubinstein et J.B. Keller, *Particle distribution functions in suspensions*, Phys. Fluids A1, pp 1632–1641, 1989.

[28] G. Russo et P. Smereka, *Kinetic theory for bubbly flow I and II*, SIAM J. Appl. Math., 56, pp 327–371, 1996.

[29] J. Schaeffer, *Global existence of smooth solutions to the Vlasov-Poisson system in three dimensions*, Arch. Rational Mech. Anal., 126, pp 183–201, 1994.

[30] H. Spohn, *Large scale dynamics of interacting particles*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

Première partie

MODÉLISATION DE LA DYNAMIQUE DES PARTICULES

Chapitre 1

Remarques sur les problèmes mathématiques liés à la dynamique de particules dispersées en interaction dans un fluide

(À paraître dans l'ouvrage de N. Bellomo et M. Pulvirenti, *Modelling in applied science, a kinetic theory approach*, Birkhauser (1999)).

Chapitre 2

Contrôle sur la fonction de distribution de particules dans un fluide de Stokes

(Soumis à *Communications in Mathematical Physics*.)

Deuxième partie

ASYMPTOTIQUES POUR LA FORMULATION CINÉTIQUE

Chapitre 3

Concentrations en temps grand pour des solutions d'équations cinétiques avec dissipation d'énergie

(À paraître dans *Communications in Partial Differential Equations.*)

Chapitre 4

Limite macroscopique d'équations du type Vlasov avec frottement

(À paraître dans *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire.*)

Troisième partie

PROBLÈMES D'EXISTENCE ET DE RÉGULARITÉ

Chapitre 5

Régularité et propagation de moments pour des systèmes de Vlasov non linéaires

(À paraître dans *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*.)

Chapitre 6

Un procédé de renormalisation pour le système de Vlasov-Poisson

(Soumis à *Journal of Statistical Physics*.)