

Mémoire présenté en vue d'obtenir

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

UNIVERSITÉ PARIS VI

Spécialité : MATHÉMATIQUES

par

Pierre-Emmanuel JABIN

MODÈLES ET FORMULATIONS CINÉTIQUES :

DÉRIVATION, RÉGULARITÉ, LIMITES

soutenue le 15 Décembre 2003 devant le jury composé de :

M. Fabrice Béthuel

M. Yann Brenier

M. Luis Caffarelli

M. François Golse

M. Guy Métivier

M. Felix Otto

M. Benoît Perthame

M. Cédric Villani

Rapporteur

Invité

Rapporteur

Invité

Rapporteur

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à Benoît Perthame, qui a continué à jouer un rôle essentiel pour moi depuis la fin de ma thèse.

J'exprime toute ma gratitude à Cédric Villani qui, en plus d'être un des mes rapporteurs, m'a suggéré de nombreuses corrections à ce mémoire.

Luis Caffarelli et Felix Otto ont également accepté la charge de rapporteur et l'ont remplie parfaitement, ce dont je les remercie chaleureusement.

Je suis de même très reconnaissant à Fabrice Béthuel, Yann Brenier, François Golse et Guy Métivier de bien vouloir faire partie de mon jury (au sens étendu).

Je voudrais remercier tous ceux avec qui j'ai eu l'occasion de travailler et François Bouchut dont le nom revient avec le plus de régularité dans la liste des personnes que j'ai pu déranger par des questions ou des idées plus ou moins intelligentes.

Enfin je dédie ce mémoire à ma famille et à Chiara Simeoni.

Table des matières

Introduction	5
1 Formulations cinétiques et régularité	7
1.1 Lois de conservation scalaires	7
1.1.1 Solutions entropiques	7
1.1.2 Solutions de viscosité	9
1.1.3 Régularité des solutions	10
1.2 Énergies de Ginzburg-Landau	11
1.2.1 Films magnétiques minces	11
1.2.2 Formulations cinétiques	12
1.2.3 États d'énergie nulle	14
1.3 Lemmes de moyenne	15
1.3.1 Introduction aux lemmes de moyenne	16
1.3.2 Une première approche	17
1.3.3 Une nouvelle méthode	18
1.3.4 Régularité BV des solutions entropiques	20
2 Particules en interaction	21
2.1 Dérivation des équations cinétiques	21
2.1.1 Limites formelles et cas simples	21
2.1.2 Le cas de forces singulières	23
2.1.3 Résultats et méthode	25
2.2 Limites hydrodynamiques pour Vlasov-Stokes	27
2.2.1 Présentation du problème	27
2.2.2 La limite des particules légères	28
2.2.3 La limite des particules fines	29
2.3 Modèles d'aérosols pour les voies respiratoires	31
2.3.1 Objectifs et premier modèle	31

2.3.2	Aérosols très dilués	33
2.4	Modèles de coagulation-fragmentation	35
2.4.1	Modélisation des phénomènes de fragmentation	35
2.4.2	Retour vers l'équilibre des équations de Becker-Döring	36
2.4.3	Une presque inégalité de Sobolev logarithmique	39
3	Mathématiques pour la biologie	43
3.1	Pourquoi de nouveaux modèles en immunologie	43
3.2	Différentiation par virulence	44
3.3	Différentiation par forme	47
3.4	Perspectives en théorie de l'évolution	49
	Publications	51

Introduction

Ce mémoire présente les recherches que j'ai effectuées depuis ma thèse sans revenir sur ce qui était déjà traité dans celle-ci.

Mes travaux portent essentiellement sur l'étude des équations cinétiques. Il s'agit d'équations posées dans l'espace des phases, dérivées au départ en physique statistique (équation de Boltzmann notamment). La trajectoire d'une particule est alors a priori une droite et est modifiée par les termes supplémentaires de l'équation (pour devenir une suite de segments de droite par exemple). Cette souplesse dans la modélisation explique que l'on rencontre des équations cinétiques jusque dans des situations assez éloignées de la physique statistique bien qu'un certain nombre de techniques ou d'idées communes se retrouvent.

Le premier chapitre s'intéresse aux formulations cinétiques et donne à la fois de nouveaux exemples de telles formulations et des résultats sur la régularité que ces formulations impliquent sur la solution du problème initial par lemmes de moyenne. Le deuxième chapitre considère quelques applications de la théorie cinétique aux systèmes de particules. Enfin la dernière partie est un peu plus éloignée de ces thématiques et porte sur des questions de biologie et plus précisément d'immunologie.

Chapitre 1

Formulations cinétiques et régularité

Les formulations cinétiques sont en quelque sorte un outil qui permet de travailler à un niveau “microscopique” sur des objets qui s’expriment naturellement au niveau “macroscopique”. Elles ont été tout d’abord développées pour les lois de conservation scalaire et la dynamique des gaz isentropiques en dimension 1 par P.L. Lions, B. Perthame et E. Tadmor (voir [51] et [51]). Pour plus de détails sur les formulations cinétiques des lois scalaires, on pourra se reporter à [57].

1.1 Lois de conservation scalaires

1.1.1 Solutions entropiques

Une loi de conservation scalaire est une équation sur une quantité scalaire $u(t, x)$ avec $x \in \mathbb{R}^d$ de la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(A(u)) &= 0, \\ u(t = 0, x) &= u^0(x), \end{aligned} \tag{1.1}$$

où A est appelé le flux. L’exemple canonique est l’équation de Burgers en dimension un

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{|u|^2}{2} \right) = 0.$$

Il est bien connu qu'une solution classique de (1.1) peut s'exprimer à l'aide des caractéristiques c'est-à-dire que $u(t, x + tu^0(x)) = u^0(x)$. Mais manifestement cela pose problème quand deux caractéristiques se croisent, *i.e.* quand pour $x_1 \neq x_2$ on a à un instant t , $x_1 + tu^0(x_1) = x_2 + tu^0(x_2)$. À ce moment on ne sait plus quelle valeur choisir. Ce type de phénomène s'appelle un choc.

L'autre problème pouvant surgir est que les caractéristiques ne permettent pas d'atteindre tout l'espace, c'est-à-dire que pour un point x_0 et un instant t on ne puisse trouver aucun point x avec $x_0 = x + tu^0(x)$. On a alors une onde de raréfaction.

Bien entendu, il est possible de définir une solution classique jusqu'à ce que l'un de ces deux phénomènes se produise et cette solution est unique dans cet intervalle de temps mais le problème se pose de savoir ce qui se passe après. L'idée la plus naturelle de considérer des solutions faibles n'est pas satisfaisante étant donné qu'il existe une infinité de solutions faibles pour une donnée initiale et que la plupart d'entre elles présentent des caractères non physiques ce qui a amené aux solutions entropiques. Une solution entropique u est une fonction L_{loc}^∞ telle que pour toute fonction convexe S , on a au sens des distributions avec $\eta'(\xi) = A'(\xi)S'(\xi)$

$$\partial_t S(u(t, x)) + \operatorname{div}(\eta(u)) \leq 0. \quad (1.2)$$

L'unicité de la solution entropique a été prouvé par S. N. Kruzkov [46] et [47] par un argument de contraction dans L^1 . La formulation cinétique consiste à remplacer cette famille d'inéquations par une seule équation cinétique comportant une variable supplémentaire. Pour cela on définit $f(t, x, v)$ par

$$f(t, x, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq v < u(t, x), \\ -1 & \text{si } u(t, x) < v \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Cette fonction f est la dérivée par rapport à v de la famille d'entropies dite entropies de Kruzkov qu'il avait employé dans la preuve d'unicité. Dans ce cadre une fonction u est une solution entropique si et seulement si la fonction f est solution de l'équation

$$\partial_t f + a(v) \cdot \nabla_x f = \partial_v m(t, x, v), \quad (1.4)$$

pour une mesure positive m et où a est la dérivée de A . Cette mesure n'est pas connue et peut être vue comme une sorte de multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de forme sur f .

La théorie d'existence et d'unicité des solutions peut se faire aussi bien dans le cadre des formulations cinétiques que dans celui des solutions entropiques (voir notamment [56] pour la preuve d'unicité). Dans les deux cas, on peut d'ailleurs parler de solutions L^1 à (1.1).

1.1.2 Solutions de viscosité

La manière la plus simple d'obtenir l'existence d'une solution entropique est comme limite d'une équation régularisée. Cela revient en fait à montrer que solution de viscosité et solution entropique de l'équation sont identiques. Cette approche est présentée ici car elle correspond exactement à la démarche entreprise pour les énergies de type Ginzburg-Landau.

À la place de (1.1), on considère l'équation régularisée

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(A(u_\varepsilon)) - \varepsilon \Delta u_\varepsilon &= 0, \\ u_\varepsilon(t=0, x) &= u^0(x), \end{aligned} \quad (1.5)$$

et on cherche la limite de u_ε quand ε tend vers 0. On définit alors

$$f_\varepsilon(t, x, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq v < u_\varepsilon(t, x), \\ -1 & \text{si } u_\varepsilon(t, x) < v \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.6)$$

On peut écrire une équation sur f , indépendamment des termes exacts de l'équation sur u_ε . En effet on s'aperçoit facilement que la dérivée de f_ε en x est nulle sauf si $v = u_\varepsilon$ puisque comme $f = \mathbb{I}_{v \geq 0} \mathbb{I}_{v < u_\varepsilon} - \mathbb{I}_{v \leq 0} \mathbb{I}_{u_\varepsilon < v}$, on a

$$\nabla_x f = \delta(v - u_\varepsilon) \nabla_x u_\varepsilon (\mathbb{I}_{v \geq 0} - \mathbb{I}_{v \leq 0}),$$

et donc quel que soit u_ε ou $a(v)$

$$a(v) \cdot \nabla_x f_\varepsilon = a(u_\varepsilon) \cdot \nabla_x f_\varepsilon.$$

Par conséquent, on a bien entendu

$$\partial_t f_\varepsilon + a(v) \cdot \nabla_x f_\varepsilon = (\partial_t u_\varepsilon + a(u_\varepsilon) \cdot \nabla_x u_\varepsilon) \times \delta(v - u_\varepsilon) \nabla_x u_\varepsilon. \quad (1.7)$$

Pour obtenir l'équation (1.4), il faut donc avant tout montrer que le membre de droite de la dernière équation converge vers la dérivée d'une mesure. Pour

cela, en utilisant (1.5) pour la première fois, on a

$$\begin{aligned} (\partial_t u_\varepsilon + a(u_\varepsilon) \cdot \nabla_x u_\varepsilon) \delta(v - u_\varepsilon) &= \varepsilon \Delta u_\varepsilon \delta(v - u_\varepsilon) \\ &= \varepsilon \operatorname{div}(\nabla_x u_\varepsilon \delta(v - u_\varepsilon)) + \varepsilon |\nabla_x u_\varepsilon|^2 \delta'(v - u_\varepsilon) \\ &= \varepsilon \operatorname{div}(\nabla_x u_\varepsilon \delta(v - u_\varepsilon)) + \varepsilon \partial_v (|\nabla_x u_\varepsilon|^2 \delta(v - u_\varepsilon)). \end{aligned}$$

En multipliant (1.5) par u_ε , on obtient l'identité d'énergie

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_\varepsilon(t, x)|^2 dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u_\varepsilon(s, x)|^2 dx ds = \int_{\mathbb{R}^d} |u^0(x)|^2 dx. \quad (1.8)$$

Ainsi $\varepsilon \nabla_x u_\varepsilon \delta(v - u_\varepsilon)$ tend vers zéro dans $L_x^2(L_v^1)$ tandis que $\varepsilon |\nabla_x u_\varepsilon|^2 \delta(v - u_\varepsilon)$ est borné dans L^1 et donc compact pour la topologie faible* des mesures d'où la limite. De plus ce dernier terme est positif et sa limite également en conséquence.

Le deuxième point à vérifier est la convergence de f_ε . Bien sûr u_ε est borné dans L^2 et donc converge faiblement après extraction vers u . Mais f_ε est une fonction non linéaire de u_ε et bien qu'étant faiblement compacte elle-même en tant que fonction de t, x, v , il n'y a aucune garantie que la limite satisfasse (1.3). Il faut la compacité forte de u_ε .

Cette compacité forte de u_ε a été initialement obtenue par des méthodes de compacité par compensation mais elle peut être obtenue directement à l'aide du cas limite des lemmes de moyenne prouvé dans [58]. À cet effet il suffit de remarquer que le membre de droite dont on vient de prouver la convergence faible se décompose en un terme compact fort dans $W_x^{-1,2}(W_v^{-1-0,1})$ et un terme borné dans $L_x^1(W_v^{-1-0,1})$.

1.1.3 Régularité des solutions

Alors que l'existence et l'unicité peuvent se démontrer aussi bien à l'aide des formulations cinétiques que des entropies, la formulation cinétique a l'avantage de permettre de préciser la régularité des solutions.

Un premier résultat simple (mais assez peu connu) est que toute solution entropique $u \in L^\infty([0, T], L_{loc}^1)$ de (1.1) appartient en fait à tous les espaces $L^\infty([t_0, T], L_{loc}^p)$, $\forall t_0 > 0$, $\forall p < \infty$. Ceci est une conséquence directe du théorème suivant démontré dans [51] (et repris dans [57])

Théorème 1.1.1 (*Lions-Perthame-Tadmor*) *On suppose que $A(u) = C|u|^\alpha$ alors*

$$\|u\|_{L^{p+\alpha-1}([0, T] \times \mathbb{R}^d)} \leq C \|u^0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

On conclut alors en remarquant simplement que si $u \in L^1([0, T], L^p)$ alors par définition pour tout $t_0 > 0$, il existe un temps $\eta < t_0$ tel que $u(\eta, \cdot) \in L^p$. Comme (1.1) préserve les normes L^p (pour les solutions entropiques), on sait donc que $u \in L^\infty([t_0, T], L^p)$ pour tout $t_0 > 0$ et en reprenant 1.1.1 on peut arriver à tout $p < \infty$.

On ne sait pas si cet effet se prolonge jusqu'à L^∞ , ce qui n'a pas une grande importance du point de vue des applications possibles de ce résultat.

La question la plus importante est celle de la régularité en termes de nombre de dérivées de la solution. On n'a de réponse complète qu'en dimension 1 où O. Oleřnik [53] a prouvé que pour des flux A strictement convexes, toute solution entropique de (1.1) est à variations bornées. Cette preuve concerne en fait les solutions de viscosité que l'on a identifiées ensuite aux solutions entropiques quand celles-ci ont été introduites. Cette régularisation BV n'a pas pu pour l'instant être obtenue directement dans le cadre des solutions entropiques.

En dimension supérieure, les principaux résultats de régularisation connus (dans des espaces de Sobolev) sont obtenus par lemmes de moyenne.

1.2 Énergies de Ginzburg-Landau

1.2.1 Films magnétiques minces

Les modèles variationnels traités ici viennent de la réduction en dimension deux d'un problème de calcul de la magnétisation dans un film magnétique d'épaisseur très faible, ce qui rend cette réduction possible. Néanmoins selon le type d'hypothèses qui sont faites, on peut dériver différents modèles (voir l'article de A. Desimone, R.V. Kohn, S. Müller et F. Otto [19]), parmi lesquels deux ont été principalement étudiés.

Le premier modèle s'intéresse aux fonctions $u_\varepsilon : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec Ω un domaine régulier de \mathbb{R}^2 , qui vérifient

$$\operatorname{div} u_\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad u_\varepsilon \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (2.1)$$

où n est la normale extérieure à $\partial\Omega$. Avec cette contrainte, on utilise l'énergie

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega (1 - |u_\varepsilon|^2)^2. \quad (2.2)$$

Le deuxième modèle consiste à échanger en quelque-sortes la contrainte avec l'énergie. On travaille alors dans la classe des fonctions u_ε pour lesquelles

$$|u| = 1 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.3)$$

tandis que l'énergie devient

$$E_\varepsilon^2(u) = \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla^{-1} \operatorname{div} u|^2, \quad (2.4)$$

Les questions liées soit à (2.1) et (2.2) soit à (2.3) et (2.4) sont les-mêmes. Il s'agit d'identifier autant que possible la limite d'une suite u_ε d'énergie bornée ou d'une suite minimisante.

Dans [20], les auteurs prouvent qu'une suite u_ε vérifiant (2.1) et dont l'énergie associée (2.2) est uniformément bornée est compacte. Ainsi toute valeur d'adhérence u est de module 1 presque partout ce qui veut dire avec la condition de divergence nulle que $u = \nabla^\perp \psi$ où ψ est une solution de l'équation eikonale

$$|\nabla \psi(x)| = 1, \quad p.p \ x \in \Omega. \quad (2.5)$$

On ne sait toujours pas (en particulier dans le cas d'une suite minimisante) si ψ est la solution de viscosité de (2.5). W. Jin et R. Kohn [45] donnant un exemple où ψ n'est pas la solution de viscosité pour un domaine non convexe précis, il semble que cela ne puisse être le cas que si Ω est convexe.

Le problème variationnel (2.3) et (2.4) paraît un peu plus facile et plus de résultats ont été obtenus. En particulier T. Rivière et S. Serfaty dans [61] démontrent la compacité d'une suite d'énergie bornée et peuvent également (avec une hypothèse technique additionnelle) prouver que la limite d'une suite minimisante correspond à la solution de viscosité.

1.2.2 Formulations cinétiques

Le coeur de la preuve dans [20] est l'introduction d'une notion d'entropie pour la contrainte (2.1). Cela n'est pas si surprenant dans la mesure où l'équation eikonale que l'on retrouve à la limite est "localement" une loi scalaire. En effet d'après (2.5), on sait que $\partial_2 \psi = \pm \sqrt{1 - |\partial_1 \psi|^2}$ et donc aux points où le signe est constant, on obtiendrait l'équation

$$\partial_2 \partial_1 \psi \pm \partial_1 (\sqrt{1 - |\partial_1 \psi|^2}) = 0,$$

qui est une loi scalaire en dimension 1 pour $\partial_1 \psi$ car x_2 joue alors le rôle du temps. Bien entendu, ce type d'argument ne saurait être rigoureux mais il montre bien les liens entre équation eikonale et loi scalaire.

La formulation cinétique que je présente plus bas est développée dans [39] (voir aussi [40] et [38]) et elle se base sur cette famille d'entropies. Mais dans le cas des lois de conservation scalaire, on peut retrouver toutes les inégalités d'entropie à partir de l'équation cinétique : il suffit de multiplier (1.4) par $S'(\xi)$ et d'intégrer en ξ pour avoir (1.2). Or ici, la formulation cinétique ne contient pas toutes les inégalités d'entropies, ce qui veut dire qu'un peu d'information est perdue. Toutefois cela n'apparaît plus après le passage à la limite en ε parce que ces entropies additionnelles ne surgissent que lorsque le module de la fonction u sur laquelle elles sont prises n'est pas constant. On part donc du lemme suivant

Lemme 1.2.1 *Pour toute fonction régulière u définie sur Ω , et en notant*

$$\chi(\xi, u) = \mathbb{I}_{\{\xi \cdot u > 0\}}, \quad (2.6)$$

on a, au sens des distributions en ξ ,

$$|u| \xi \cdot \nabla_x \chi(\xi, u) = -|\xi|^2 \left[\nabla_x |u| - \operatorname{div} u \frac{u}{|u|} \right] \cdot \nabla_\xi \chi. \quad (2.7)$$

Ce lemme et l'équation (2.7) obtenue correspondent exactement à l'équation (1.7). On peut donc écrire (2.7) pour u_ε et le but est de borner le terme de droite par la dérivée d'une mesure à la limite en ε . Pour cela, l'équivalent de (1.8) est la borne suivante qui est une conséquence immédiate de ce que l'on considère une suite d'énergie bornée

$$\sup_\varepsilon \|(1 - |u_\varepsilon|^2) \nabla_x u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} < \infty. \quad (2.8)$$

Avec (2.8), l'équation (2.7) donne tout d'abord la compacité de la suite u_ε grâce aux lemmes de moyenne de [58]. Ensuite on peut passer à la limite dans (2.7) tout comme pour les lois scalaires et obtenir l'équation suivante sur toute valeur d'adhérence u

$$\xi \cdot \nabla_x \chi(\xi, u) = \nabla_\xi \cdot m(x, \xi), \quad (2.9)$$

où m est une mesure bornée par la limite inférieure de l'énergie.

Jusqu'ici tout fonctionne comme pour les lois de conservation scalaires, mais la principale différence est le manque d'une information comme le signe de la mesure qui permettrait d'obtenir par exemple l'unicité de la solution de (2.9).

Cette formulation cinétique a été dérivée pour (2.1) et (2.2), mais la même démarche s'applique au problème formé par la contrainte (2.3) et l'énergie (2.4) (voir notamment [60]).

L'équation (2.9) a plusieurs conséquences. La première est qu'elle implique une certaine régularité sur la limite u par lemme de moyenne. En appliquant la version prouvée par DiPerna, Lions et Meyer, on trouve que $u \in W^{s,5/3}$ pour tout $s < 1/5$. Cette régularité peut être améliorée jusqu'à $W^{s,3/2}$ pour tout $s < 1/3$ avec de nouvelles versions (voir la troisième section).

D'autre part, un point intéressant et délicat concerne la relation possible entre la mesure m et la Γ -limite de l'énergie. Sans qu'il soit possible de donner de réponse complète, il semblerait surprenant que la masse de m par exemple soit exactement la Γ -limite, en revanche on pourrait imaginer que ces deux quantités soient toujours du même ordre (avec toute la latitude que comporte une assertion aussi vague). Un tout début de réponse est donné par l'étude des cas où la Γ -limite est nulle.

1.2.3 États d'énergie nulle

La formulation cinétique (2.9) permet de caractériser complètement tous les états d'énergie nulle, ce qui est détaillé dans [37]. En effet si une fonction u correspond à un tel état alors la mesure dans (2.9) est nulle. On est donc ramené à l'étude des fonctions u de module 1 presque partout et telles que au sens des distributions

$$v \cdot \nabla_x \chi(\xi, u) = 0. \quad (2.10)$$

Cette dernière équation signifie que χ est constante le long de toute droite parallèle à ξ . En tenant compte de la forme de χ cela a pour conséquence que $u(x_1)$ et $u(x_2)$ sont parallèles si $(x_1 - x_2) \cdot u(x_1) = 0$.

Cette propriété géométrique très simple permet de déterminer complètement la structure de u . On prouve donc tout d'abord dans \mathbb{R}^2

Théorème 1.2.1 *Soit une fonction mesurable de \mathbb{R}^2 , u telle que $\chi(\xi, u)$ soit solution de (2.10) avec de plus $|u| = 0$ presque partout. Alors soit u est*

constante, i.e. il existe $u_0 \in S^1$ tel que

$$u(x) = u_0 \quad p. p. \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

ou u est un vortex, i.e. il existe un point $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^2$ et un signe $\alpha \in \{-1, 1\}$ tels que

$$u(x) = \alpha \frac{(x - \mathcal{O})^\perp}{|x - \mathcal{O}|} \quad p. p. \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

où \perp est la rotation de $\frac{\pi}{2}$.

Ce théorème permet également d'apporter une réponse complète dans le cas d'un domaine plus général puisque l'on peut en déduire

Théorème 1.2.2 *Supposons que Ω vérifie la propriété suivante*

$\Omega \neq \mathbb{R}^2$ est connexe, C^2 , et soit Ω est une bande, soit $\exists \tilde{y}, \tilde{z} \in \partial\Omega$ tel que les normales issues de \tilde{y} , et \tilde{z} sont différentes et s'intersectent à l'intérieur de Ω avant de toucher $\partial\Omega$.

(2.11)

De plus soit une fonction u solution de (2.10), et telle que $|u(x)| = 1$ presque partout et $u \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$. Alors soit Ω est un disque et u est un vortex, ou Ω est une bande et u est une constante.

La conclusion du théorème 1.2.2 est que sauf dans deux cas particuliers, il n'existe pas d'états d'énergie nulle.

Le point important de la preuve est qu'il s'agit d'un argument géométrique très simple se basant sur le fait que la solution est constante le long des caractéristiques. Cette idée est commune à la partie suivante.

1.3 Lemmes de moyenne

Les lemmes de moyenne rendent compte d'un effet régularisant particulier aux équations cinétiques linéaires. Bien que celles-ci en tant qu'équations de transport ne puissent aboutir à régulariser la solution, elles régularisent ses moyennes en vitesse. Les lemmes de moyenne ont tout d'abord été développés dans un cadre L^2 et en utilisant l'analyse de Fourier. Les travaux suivants ont essentiellement gardé ce point de vue.

Dans la perspective des formulations cinétiques, les lemmes de moyenne sont particulièrement importants. En effet, la moyenne en vitesse est alors le seul objet intéressant et tant pour les énergies de Ginzburg-Landau que pour les lois scalaires en dimension deux et plus, les lemmes de moyenne fournissent pour l'instant la seule information dont on dispose sur la régularité de la solution (en termes d'espaces de Sobolev).

1.3.1 Introduction aux lemmes de moyenne

On prendra le cas d'une équation cinétique stationnaire, le cas instationnaire s'en déduisant facilement. On peut de même généraliser à des flux plus généraux que v .

Soit donc une fonction f solution de

$$v \cdot \nabla_x f = \Delta_x^{\alpha/2} g. \quad (3.1)$$

Le but des lemmes de moyenne est de préciser la régularité de

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, v) \phi(v) dv, \quad (3.2)$$

pour une fonction C^∞ donnée ϕ , à support compact. Ces deux hypothèses (C^∞ et support compact) peuvent toujours être relâchées dans une certaine mesure mais le point jusqu'où cela est possible dépend des situations et cela n'est pas utile dans la plupart des cas pratiques.

Le résultat optimal typique a été obtenu par DiPerna, Lions et Meyer [22] et donne (le résultat est en fait un peu plus précis avec des espaces de Besov)

Théorème 1.3.1 (*DiPerna-Lions-Meyer*) *Supposons que $f \in L^p(\mathbb{R}^{2d})$ et $g \in L_x^q(\mathbb{R}^d, W_v^{\gamma, q}(\mathbb{R}^d))$ avec $\gamma \leq 0$, solutions de (3.1) pour $\alpha < 1$. Alors pour tout $s < s_0$*

$$\rho \in W_{loc}^{s, r}(\mathbb{R}^d), \quad s_0 = (1-\alpha) \theta = (1-\alpha) \times \frac{1 - 1/\bar{p}}{1 - 1/\bar{p} - \gamma + 1/\bar{q}}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q},$$

où $\bar{p} = \min(p, p^*)$ avec $1/p + 1/p^* = 1$ et la même chose pour \bar{q} .

On peut d'ailleurs en fait prouver que le cas limite est vrai, c'est-à-dire que $\rho \in W^{s_0, r}$. On pourra également se reporter à la première partie due à Bouchut de [9] pour une preuve beaucoup plus simple.

1.3.2 Une première approche

En dépit de son caractère optimal, le résultat précédent n'est pas tout-à-fait satisfaisant, notamment dans le cadre des formulations cinétiques parce qu'il n'exploite pas toute l'information disponible sur la structure de f . Un excellent exemple est donné dans [51] où en répétant le théorème précédent, on peut arriver à $1/3$ de dérivée pour une solution entropique d'une loi scalaire au lieu de seulement $1/5$ si l'on utilise une seule fois le théorème. Il est à noter que la régularité dans $W^{1/3,p}$ est optimale pour une solution de (1.4) si le signe de la mesure n'est pas déterminé (se reporter à De Lellis et Westdickenberg [18]).

Un premier travail avec B. Perthame [41] a donc consisté à essayer d'obtenir ce type de résultat d'une manière directe. La preuve utilise toujours l'analyse de Fourier, une décomposition de l'opérateur $v \cdot \nabla_x$ semblable à celle de [58] et une méthode d'interpolation réelle. Le théorème obtenu est alors

Théorème 1.3.2 *Supposons que $f \in L_x^p(\mathbb{R}^d, W_v^{\beta,p}(\mathbb{R}^d))$ avec $\beta < 1$ et $g \in L_x^q(\mathbb{R}^d, W_v^{\gamma,q}(\mathbb{R}^d))$ avec $\gamma < 1$, solutions de (3.1) pour $\alpha < 1$. Alors pour tout $s < s_0$*

$$\rho \in W_{loc}^{s,r}(\mathbb{R}^d), \quad s_0 = (1-\alpha) \theta = (1-\alpha) \frac{1-1/\bar{p}+\beta}{1-1/\bar{p}+\beta-\gamma+1/\bar{q}}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q},$$

où $\bar{p} = \min(p, p^*)$ avec $1/p + 1/p^* = 1$ et la même chose pour \bar{q} .

Ce théorème permet d'exploiter la régularité additionnelle en vitesse et donc d'obtenir directement $1/3$ de dérivée pour la solution entropique d'une loi scalaire. La même régularité s'applique à la limite d'une suite d'énergie bornée de (2.1), (2.2) ou (2.3) et (2.4) (au lieu de $1/5$).

Un point assez étrange dans le théorème 1.3.2 est la limitation $\beta < 1$. La limitation $\gamma < 1$ est par contre très naturelle (sinon on pourrait gagner plus d'une dérivée). De plus une autre question se pose, si l'on peut améliorer le résultat en ayant davantage de régularité en vitesse, en terme de dérivabilité, la chose est-elle aussi possible s'il s'agit de régularité en terme d'intégrabilité? Par exemple, si $f, g \in L_x^2(L_v^\infty)$ on est en droit de se demander si l'on ne peut pas obtenir plus d'une $1/2$ dérivée.

L'article de Westdickenberg [66] renforce cette interrogation. En effet l'auteur n'obtient pas la moyenne ρ dans des espaces de Sobolev mais dans des espaces plus faibles. Mais du point de vue de l'homogénéité par injection de Sobolev, la régularité de la moyenne ne dépend alors que de la régularité (intégrabilité ou dérivabilité) en vitesse de f et g .

1.3.3 Une nouvelle méthode

On est donc amené à une nouvelle étude : si $f, g \in L_x^p(W_v^{\beta,q})$, quelle est la régularité optimale sur la moyenne ? La réponse à cette question est malheureusement complexe et partielle.

L'idée principale suivie avec L. Vega [44] et [43] est de revenir aux caractéristiques et de tout faire dans l'espace réel sans transformée de Fourier. La méthode est très simple, on écrit pour tout $\lambda > 0$

$$(\lambda + v \cdot \nabla_x) f = g + \lambda f.$$

Le nouvel opérateur obtenu $\lambda + v \cdot \nabla_x$ est donc inversible et

$$\rho(x) = Tg + \lambda Tf,$$

avec

$$Tg(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty g(x - vt, v) e^{-\lambda t} \phi(v) dt dv. \quad (3.3)$$

Le paramètre λ servira seulement à interpoler entre Tf et Tg . Toute la question se résume ainsi à déterminer les propriétés de T qui ressemble beaucoup au dual de ce que l'on appelle la transformée aux rayons X qui s'écrit

$$Xh(x, v) = \int_{-\infty}^\infty h(x + vt) dt. \quad (3.4)$$

La principale différence est que T semble plutôt une demi-transformée aux rayons X (intégration sur une demi-droite). Cela peut en fait poser quelques problèmes de singularité à l'origine. Pour f , on peut constater que

$$\begin{aligned} Tf &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty \partial_t(t) f(x - vt, v) e^{-\lambda t} \phi(v) dt dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty (\lambda f(x - vt, v) + v \cdot \nabla_x f(x - vt, v)) t e^{-\lambda t} \phi(v) dt dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty (\lambda f(x - vt, v) + g(x - vt, v)) t e^{-\lambda t} \phi(v) dt dv. \end{aligned}$$

Cette remarque fait disparaître toute singularité à l'origine pour Tf . Pour Tg , une condition commode consiste à supposer que

$$g(x, -v) \phi(-v) = g(x, v) \phi(v). \quad (3.5)$$

D'un point de vue physique, cette hypothèse est difficile à justifier ou même à expliquer, notamment parce que tout dépend du problème précis qui est étudié. Elle peut par exemple signifier qu'une "particule" de vitesse $-v$ a exactement la même trajectoire qu'une particule de position initiale identique mais de vitesse v .

Techniquement, elle implique

$$Tg = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-\infty}^{\infty} g(x - vt, v) e^{-\lambda|t|} \phi(v) dt dv.$$

Même sans la condition (3.5) on peut obtenir certains résultats mais ils sont souvent plus faibles.

Grâce à cette méthode on peut apporter certaines réponses. Un premier résultat, négatif mais qui illustre certaines limitations, montre que les choses ne peuvent être aussi simples

Proposition 1.3.1 *Il existe f et g dans $L_x^1(\mathbb{R}^d, L_v^\infty(\mathbb{R}^d))$ solution de (3.1) telles que pour tout $s > 0$ et pour tout p*

$$\rho \notin W_{loc}^{s,p}.$$

En fait dans ce cas on peut montrer que $\rho \in L_{loc}^2$ si $d = 2$, c'est-à-dire que l'on ne gagne pas de dérivabilité mais un peu d'intégrabilité (et pas suffisamment d'ailleurs, on devrait avoir $\rho \in L^\infty$). Toutefois il y a des cas où l'on peut obtenir quand même des dérivées en plus. Un autre résultat important prouvé dans [44] est

Proposition 1.3.2 *En dimension $d = 2$, si f et g appartiennent à $L_x^{4/3}(L_v^2)$, sont solutions de (3.1) avec (3.5), alors $\rho \in W^{s,4/3}, \forall s < 1/2$. De plus si f et g sont dans $L_x^{4/3}(L_v^\infty)$ alors $\rho \in H^s, \forall s < 1/2$.*

Ainsi il semble que selon l'espace en x , il y ait un premier seuil jusqu'auquel l'intégrabilité en vitesse donne bien des dérivées supplémentaires sur la moyenne. Après ce seuil, on ne peut plus avoir que de l'intégrabilité et il semble enfin qu'il existe un deuxième seuil au-delà duquel on ne gagne plus rien.

De toute évidence d'autres travaux seront nécessaires pour pouvoir préciser ce comportement, en particulier en dimension supérieure à deux.

1.3.4 Régularité BV des solutions entropiques

Une solution entropique d'une loi de conservation scalaire avec flux convexe en dimension un est automatiquement *BV*. Pourtant les lemmes de moyenne quels qu'ils soient ne donnent que $1/3$ de dérivée et ne sont donc pas optimaux dans ce cas. Ceci laisse à penser qu'ils ne le sont pas non plus en dimension supérieure où d'autre part on n'a pas d'autre argument de régularité.

Il serait donc crucial de comprendre comment obtenir la régularité *BV* en dimension 1 directement dans le cadre des solutions entropiques. Cette partie ne prétend pas apporter de réponse mais seulement montrer où se situe le problème.

L'argument d'Oleńnik est en deux parties. La première partie prouve que la partie positive de la dérivée d'une solution classique à (1.1) est bornée par $1/t$ et est donc indépendante de la donnée initiale. Cela suffit à impliquer que la norme *BV* locale d'une telle solution est aussi bornée par C/t (avec C taille du support). La deuxième partie de l'argument est un simple principe du maximum qui dit que les solutions de (1.5) vérifie la même borne.

La première partie de l'argument peut être reproduite dans un cadre entropique ou de formulation cinétique. En effet une solution classique u de (1.1) vérifie que, par exemple si le flux est simplement $A(\xi) = \xi^2$ en dimension 1

$$\partial_t f + v \cdot \partial_x f = 0.$$

Une version des lemmes de moyenne comme [41] ou [44] montre alors que $u \in W^{s,1}$, $\forall s < 1$. De plus la même régularité reste vraie en dimension supérieure pourvu que l'on ait certaines hypothèses fortes sur le flux.

Toute la difficulté consiste par conséquent à prouver que la mesure au second membre ne modifie pas cette propriété. Or les formulations entropique comme cinétique correspondent bien à un principe du maximum mais seulement sur la solution elle-même et pas sur sa dérivée comme c'est le cas pour (1.5).

Chapitre 2

Particules en interaction

Cette partie s'intéresse à la modélisation de particules en interaction et notamment en interaction dans un fluide ; elle prolonge donc les travaux entamés dans ma thèse.

Les travaux abordés peuvent se voir dans la perspective de toujours essayer de travailler à l'échelle la plus grande possible. Plus précisément, il existe trois niveaux pour modéliser un système de particules. Le premier, souvent appelé microscopique, consiste à écrire une équation différentielle (ou plus exactement six en dimension trois) pour chaque particule. Le deuxième niveau ou niveau mésoscopique est celui des équations cinétiques (c'est-à-dire des équations dans l'espace des phases) et le niveau macroscopique implique un système d'équations sur des densités dans l'espace physique.

Bien entendu au départ seul les équations différentielles au niveau microscopique sont rigoureusement justifiées. Il s'agit ainsi de passer rigoureusement d'abord au niveau mésoscopique puis dans certains cas aux équations macroscopiques.

2.1 Dérivation des équations cinétiques

2.1.1 Limites formelles et cas simples

Considérons N particules dont on note les positions $X_i(t)$ et les vitesses $V_i(t)$. On suppose que les seules forces agissant sur une particule sont dues aux autres particules et que ces forces sont de type binaires, c'est-à-dire que

les X_i, V_i sont solutions de

$$\begin{cases} \dot{X}_i = V_i, \\ \dot{V}_i = \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} F(X_i - X_j). \end{cases} \quad (1.1)$$

On prendra toujours $F(0) = 0$ même dans le cas où F est singulière à l'origine, ce qui veut simplement dire qu'une particule n'exerce pas de force sur elle-même.

L'hypothèse selon laquelle il n'y a pas de force extérieure est en fait facultative et ne sert qu'à simplifier le problème. En revanche l'hypothèse sur la forme de la force est fondamentale. Enfin le facteur $1/N$ est un paramètre de normalisation. Il apparaît en général naturellement (parce que plus il y a de particules dans un espace donné plus leur masse et charge doivent être petites pour des interactions gravitationnelles ou coulombiennes par exemple) mais dans le cas contraire il correspond juste à une renormalisation en temps et en espace pour travailler avec des quantités d'ordre 1.

Quand le nombre de particules devient très grand, le système (1.1) qui se compose de $6N$ équations devient presque impossible à calculer. Posons donc

$$\begin{aligned} f_N(t, x, v) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - X_i(t)) \otimes \delta(v - V_i(t)), \\ \rho_N &= \int_{\mathbb{R}^d} f_N(t, x, v) dv = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - X_i(t)). \end{aligned} \quad (1.2)$$

On constate alors que d'après (1.1), f_N est solution de l'équation suivante au sens des distributions

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_N + F \star_x \rho \cdot \nabla_v f &= 0, \\ \rho(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) dv. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Un bon candidat pour remplacer (1.1) est ainsi (1.3) pour la limite faible f de f_N , tout le problème étant de le montrer rigoureusement lorsque la fonction F n'est pas régulière.

En effet si $F \in C_0(\mathbb{R}^d)$ alors l'existence de solutions mesure à (1.3) ne pose pas de problèmes particuliers. Si f est une mesure de Radon, ρ en est une aussi donc $F \star_x \rho$ est une fonction de $C_0(\mathbb{R}^d)$ et le terme $F \star_x \rho \cdot \nabla_v f$ ne pose

pas de problème au sens des distributions. Passer à la limite dans (1.3) de f_N à sa limite faible f revient juste à un résultat de stabilité faible.

La seule difficulté est de prouver la compacité de $F \star_x \rho_N$. On peut par exemple choisir une suite F_n de $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers F pour la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$. Alors on a

$$\|\nabla_x F_n \star_x \rho_N\|_{L^\infty} \leq \|\nabla_x F_n\|_{L^\infty},$$

et comme au sens des distributions

$$\partial_t \rho_N + \operatorname{div}_x \left(\int_{\mathbb{R}^d} v f_N(t, x, v) dv \right) = 0,$$

on a également que

$$\|\partial_t F_n \star_x \rho_N\|_{L^\infty} \leq \|\nabla_x F_n\|_{L^\infty} \times \left\| \int_{\mathbb{R}^d} v f_N(t, x, v) dv \right\|_{M^1}.$$

Or d'après (1.3), on sait que pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^{2d}} v f_N(t, x, v) \phi(x, v) dv dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^{2d}} F \star_x \rho_N \cdot \nabla_v \phi f_N(t, x, v) dv dx \right| \\ &\leq C \|f_N\|_{M^1(\mathbb{R}^{2d})}^2 \leq C, \end{aligned}$$

ce qui montre que la suite $F_n \star_x \rho_N$ est uniformément continue en N et donc converge pour la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$. On en déduit finalement que $F \star_x \rho_N$ converge également car

$$\|(F - F_n) \star_x \rho_N\|_{L^\infty} \leq \|F - F_n\|_{L^\infty} \times \|\rho_N\|_{M^1} \leq \|F - F_n\|_{L^\infty}.$$

Il existe d'autres preuves de cela, en particulier une due à Spohn [62] qui utilise la distance de Wasserstein et permet d'obtenir en même temps la limite et l'unicité de la solution.

2.1.2 Le cas de forces singulières

Les choses deviennent beaucoup plus intéressantes et difficiles lorsque F est singulière, notamment à l'origine. Par exemple pour des interactions électrostatiques, on aimerait prendre $F(x) = \pm x/|x|^3$ en dimension trois.

Mais bien sûr, si F n'est plus continue, il n'est pas possible en général de donner un sens au produit $F \star_x \rho$ si f est seulement une mesure. En fait on

n'a alors en général aucune garantie qu'il existe une solution unique à (1.1). On se restreindra dorénavant au cas où F a une singularité algébrique en 0, c'est-à-dire que l'on suppose qu'il existe une constante C telle que

$$|F(x)| \leq \frac{C}{|x|^\alpha}, \quad |\nabla F(x)| \leq \frac{C}{|x|^{1+\alpha}}, \quad |D^2 F(x)| \leq \frac{C}{|x|^{2+\alpha}}. \quad (1.4)$$

Le premier problème qui se pose est de savoir s'il existe une solution unique ou pas à (1.1). Or bien sûr il peut y avoir des collisions entre particules (la singularité de F n'est pas assez forte pour l'empêcher même pour des forces répulsives), il suffit par exemple de prendre seulement deux particules de positions et vitesses initiales $X_1(0) = -X_2(0)$ et $V_1(0) = -V_2(0)$.

Une première réponse consisterait à dire que les configurations initiales pour lesquelles il y a au moins une collision entre particules sont de mesure nulle. Cela serait toutefois assez difficile à justifier. On pourrait aussi remarquer que si $\alpha < 1$ il est possible de définir une solution (faible) de (1.1) même en cas de collision ou travailler seulement jusqu'au temps de première collision. Toutefois le point de vue le plus simple (qui est aussi celui généralement adopté numériquement) consiste à supposer que F est en fait régulière ou régularisée par un paramètre qui dépend éventuellement de N . En particulier si l'on régularise F , en remplaçant par exemple $x/|x|^{1+\alpha}$ par $x/(|x| + \varepsilon)^{1+\alpha}$, il faut veiller à ce que ε soit beaucoup plus petit que la distance minimale initiale entre deux particules ! L'article de Batt [3] détaille cette idée dans le cas Vlasov-Poisson.

En choisissant cette méthode, on n'a plus aucune difficulté à définir (1.1) mais pour passer à la limite il faut obtenir des estimations indépendantes du paramètre de régularisation et du nombre de particules.

Enfin une remarque de nature plus physique s'impose. Si F dérive d'un potentiel, *i.e.* si

$$F(x) = \nabla_x V(x), \quad V(-x) = V(x), \quad |V(x)| \leq \frac{C}{|x|^{\alpha-1}}, \quad (1.5)$$

alors le système (1.1) a une énergie conservée qui s'écrit

$$E(t) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N |V_i(t)|^2 + \frac{1}{2N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(X_i - X_j). \quad (1.6)$$

On voit alors deux comportements très différents. Si $\alpha < 1$, cette énergie implique seulement une borne sur l'énergie cinétique. Par contre si $\alpha > 1$ et

si l'on a par exemple

$$V(x) \geq \frac{1}{C|x|^{\alpha-1}} \quad (1.7)$$

alors il ne peut y avoir de collision entre les particules et (1.1) a toujours une solution unique. Par contre l'énergie n'est toujours pas suffisante pour borner uniformément le produit $F \star_x \rho f$.

On constate donc qu'il y a un net changement de comportement entre les cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$. Dans le premier cas le comportement local près d'une collision ne semble pas avoir d'importance sur la dynamique au contraire du cas $\alpha > 1$ où l'hypothèse de forces répulsives est certainement très utile. Ceci laisse entendre que la séparation entre le cas F continue ou $\alpha \leq 0$ et le cas $\alpha < 1$ est assez artificiel et n'est due qu'à des difficultés dans l'analyse mathématique.

Il faut souligner la différence entre la dérivation des systèmes macroscopiques et des équations cinétiques. Aussi proches qu'ils puissent paraître (comme Euler 2D en formulation vorticité dans l'article de Goodman, Hou et Lowengrub [26]), toute la démarche dans le cas macroscopique revient à justifier rigoureusement que les particules ne peuvent pas se rapprocher considérablement plus qu'elles ne l'étaient au départ, ainsi que cela apparaît dans [36]. Dans le cas cinétique cela se produit nécessairement.

Plus qu'une justification précise de l'emploi des équations cinétiques, l'intérêt principal de ce problème est peut-être de comprendre et contrôler comment évolue la distribution des particules dans le nuage.

2.1.3 Résultats et méthode

Les résultats obtenus avec M. Hauray dans [31] s'appliquent au cas $\alpha < 1$. En particulier un élément essentiel de l'analyse est l'écart entre les particules dans l'espace des phases et pour cela on introduit la quantité

$$m_N(T) = \sup_{t \in [0, T], i \neq j} \frac{N^{-1/6}}{|X_i(t) - X_j(t)| + |V_i(t) - V_j(t)|}, \quad (1.8)$$

en plus des bornes habituelles

$$R_N(T) = \sup_{t \in [0, T], i} |X_i(t)|, \quad K_N(T) = \sup_{t \in [0, T], i} |V_i(t)|. \quad (1.9)$$

Il faut remarquer qu'une borne sur m implique aussi des bornes sur ce que l'on pourrait appeler des normes L^∞ discrètes (se reporter à [31] pour plus de précisions).

L'essentiel de l'argument revient à comprendre que l'on ne peut pas avoir d'estimations L^∞ sur les forces en tout temps, justement à cause des collisions mais que tout se passe bien si l'on moyenne les oscillations, comme dans Pulvirenti et Simeoni [59] pour l'obtention de normes L^∞ pour l'équation de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck. Ainsi on définit

$$\bar{E}_N(T) = \sup_{t \in [t_0, T-\varepsilon], i=1, \dots, N} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} |E(X_i(s))| ds \right\}, \quad (1.10)$$

et

$$\Delta \bar{E}_N(T) = \sup_{t \in [t_0, T-\varepsilon]} \sup_{i, j=1, \dots, N} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \frac{|E(X_i(s)) - E(X_j(s))|}{\varepsilon^\alpha + |X_i(s) - X_j(s)|} ds \right\}. \quad (1.11)$$

On peut tout d'abord vérifier que des bornes sur ces quantités permettent en effet de passer à la limite et pour cela il est assez simple de prouver le résultat suivant

Théorème 2.1.1 *Soit une suite de solutions de (1.1) telle que sur un intervalle fixé $[0, T]$*

$$\sup_N \sup_{t \in [0, T]} \{m_N(t), R_N(t), K_N(t), \bar{E}_N(t), \Delta \bar{E}_N(t)\} < \infty,$$

alors la limite faible f de f_N est unique, à support compact dans $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^{2d})$ et est solution de (1.3).

Le coeur de la preuve est donc de prouver que les quantités considérées restent uniformément bornées en N comme

Proposition 2.1.1 *On suppose que $\alpha < 1$, pour tout temps T , il existe une constante C dépendant uniquement de T , $m_N(0)$, $R_N(0)$ et $K(0)$ telle que*

$$\sup_{t \in [0, T]} \{m_N(t), R_N(t), K_N(t), \bar{E}_N(t), \Delta \bar{E}_N(t)\} \leq C.$$

Bien entendu la principale question ouverte est d'obtenir le même type de résultat quand $\alpha > 1$ même en se restreignant à des forces répulsives. Cependant il est aussi possible de s'intéresser à des situations où l'expression

des forces n'est pas exactement de la forme donnée par (1.1). On pense par exemple à des cas où la force exercée par une particule sur une autre dépend également des vitesses de chacune ou éventuellement à une situation où la décomposition de la force en somme d'interactions à deux particules ne serait vraie qu'à la limite.

2.2 Limites hydrodynamiques pour Vlasov-Stokes

2.2.1 Présentation du problème

Un modèle cinétique (souvent couplé avec une équation fluide) décrivant des particules en interaction avec un fluide comporte généralement un certain nombre de constantes très petites ou très grandes. Cela est simplement dû au fait que les particules considérées ont souvent un petit diamètre (de l'ordre du micron par exemple). Il est alors souhaitable de remplacer l'équation cinétique par un système macroscopique d'abord parce que l'on ne travaille plus que dans l'espace physique et ensuite parce que le système limite a des constantes d'ordre 1 qui sont plus faciles à manipuler, notamment numériquement.

Le cas traité dans cette partie est restreint au système de Vlasov-Stokes mais la partie suivante s'intéresse également à ce type de question mais sans couplage avec un fluide.

Le système de Vlasov-Stokes est une manière simple de modéliser la dynamique d'un nuage de particules dans un fluide. Il s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t f + \alpha v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot (\lambda(u - v)f) = r \Delta_v f, \\ \rho_g(\partial_t u + \operatorname{div}_x(u \otimes u) + \nabla_x p) - \mu \Delta_x u = \eta \int_{\mathbb{R}^3} (v - u) f \, dv, \\ \operatorname{div}_x(u) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Les valeurs des constantes λ , r et η en fonction des paramètres physiques sont données dans [28]. La densité ρ_g du fluide est supposée constante en temps et espace.

La première équation décrit l'évolution de la densité de particules dans l'espace des phases. Les particules sont seulement soumises à un frottement par rapport à la vitesse locale du fluide ; elles sont aussi sujettes au mouvement

brownien, ce qui suppose qu'elles sont déjà assez petites (quelques microns). La force qui s'applique sur le fluide est calculée en prenant l'opposée de la force totale exercée par le fluide sur toutes les particules au même point d'espace.

Des théories d'existence sont disponibles pour un système comme (2.1) (voir Hamdache [30] par exemple).

Cafilisch et Papanicolaou [14] ont étudié les valeurs numériques des paramètres dans deux cas expérimentaux et obtenu formellement deux limites de (2.1).

Ces deux limites sont prouvées rigoureusement dans [28], [29].

Citons une propriété générale importante du système (2.1) qui est de disposer d'une énergie libre (qui est la seule quantité physique conservée hormis la masse des particules et la quantité de mouvement totale) qui s'écrit

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left(\frac{2\sqrt{\lambda r} - r}{\lambda} \ln f + \frac{|v|^2}{2} \right) f \, dv dx + \frac{\lambda \rho_g}{\eta} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u|^2}{2} \, dx, \quad (2.2)$$

et pour laquelle on a formellement l'égalité suivante

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = -\frac{\mu \lambda}{\eta} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla_x u|^2}{2} \, dx - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{|\sqrt{\lambda} (v - u) f + \sqrt{r} \nabla_v f|^2}{f} \, dx \, dv. \quad (2.3)$$

Ce type d'estimation d'énergie libre avait déjà été utilisée pour le système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck par Bouchut dans [8].

Enfin, il ne s'agit bien entendu pas des premiers travaux dérivant un système macroscopique d'un système couplé cinétique-fluide. Ces travaux constituent en fait une extension de premières tentatives dans [27] et [33]. D'autre part pour des fluides turbulents, peut citer notamment [5], [15] et [23].

2.2.2 La limite des particules légères

On considère ici le système suivant, en dimension deux

$$\begin{cases} \partial_t f^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla_v \cdot \left((v - \varepsilon u^\varepsilon) f^\varepsilon + \nabla_v f^\varepsilon \right), \\ \partial_t u^\varepsilon + \operatorname{div}_x (u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon) + \nabla_x p^\varepsilon - \Delta_x u^\varepsilon = J^\varepsilon - \rho^\varepsilon u^\varepsilon, \\ \operatorname{div}(u^\varepsilon) = 0, \\ \rho^\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} f^\varepsilon(t, x, v) \, dv, \quad J^\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{v}{\varepsilon} f^\varepsilon(t, x, v) \, dv. \end{cases} \quad (2.4)$$

Dans ce cas l'identité d'énergie (2.3) pour (2.2) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} f^\varepsilon \left(\frac{v^2}{2} + \ln(f^\varepsilon) \right) dv dx + \int_{\mathbb{T}^2} \frac{(u^\varepsilon)^2}{2} dx = & - \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla_x u^\varepsilon|^2 dx \\ & - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} \left| (v - \varepsilon u^\varepsilon) \sqrt{f^\varepsilon} + 2 \nabla_v \sqrt{f^\varepsilon} \right|^2 dv dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Grâce à cette identité il est possible de borner et d'identifier la limite faible de termes du type $\rho^\varepsilon u^\varepsilon$ pourvu que l'on soit en dimension deux. À l'aide de quelques manipulations techniques, on peut également arriver à se dispenser de prendre la limite de termes du type $\rho^\varepsilon u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon$.

Ainsi il est possible d'utiliser une méthode directe de compacité pour obtenir

Théorème 2.2.1 *Supposons que $f_0^\varepsilon \geq 0$, $f_0^\varepsilon \in L^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ et $u_0^\varepsilon \in L^2(\mathbb{T}^2)$ vérifient*

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} f_0^\varepsilon (1 + v^2 + |\ln(f_0^\varepsilon)|) dv dx \leq C_0, \\ \int_{\mathbb{T}^2} |u_0^\varepsilon|^2 dx \leq C_0, \end{cases}$$

pour $C_0 > 0$, indépendant de ε . Soit $0 < T < \infty$. Alors, à une extraction de sous-suite près, la densité ρ^ε converge faiblement dans $L^1((0, T) \times \mathbb{T}^2)$ vers ρ , et u^ε converge faiblement dans $L^2(0, T; H^1(\mathbb{T}^2))$ et fortement dans $L^2((0, T) \times \mathbb{T}^2)$ vers u avec

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(u \rho - \nabla \rho) = 0, \\ \partial_t u + \operatorname{div}(u \otimes u) + \nabla_x p - \Delta_x u = 0, \\ \operatorname{div}(u) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

La méthode choisie est très simple et cela a pour conséquence que l'analyse ne fonctionne qu'en dimension deux et que l'on n'identifie pas la limite faible de f^ε . Formellement celle-ci devrait être seulement une maxwellienne centrée en zéro.

2.2.3 La limite des particules fines

À la différence du paragraphe précédent, les équations sont posées dans tout l'espace en dimension deux ou trois mais les données initiales sont "préparées". Cela correspond au fait qu'une méthode directe par compacité ne peut plus fonctionner et que l'on est alors amené à recourir à des

méthodes d'entropie relative ou énergie modulée à l'image de Brenier [11] par exemple.

On s'intéresse donc à la limite de

$$\begin{cases} \partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla_v \cdot \left((u^\varepsilon - v) f^\varepsilon - \nabla_v f^\varepsilon \right), \\ \partial_t u^\varepsilon + \operatorname{div}(u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon) + \nabla_x p^\varepsilon - \Delta_x u^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\mathbb{R}^d} v f^\varepsilon \, dv - u^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon \, dv \right), \\ \operatorname{div}(u^\varepsilon) = 0, \\ f^\varepsilon|_{t=0} = f_0^\varepsilon, \quad u^\varepsilon|_{t=0} = u_0^\varepsilon. \end{cases} \quad (2.7)$$

L'égalité d'énergie devient maintenant

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^{2d}} f^\varepsilon \left(\frac{v^2}{2} + \ln(f^\varepsilon) \right) \, dv \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(u^\varepsilon)^2}{2} \, dx &= - \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u^\varepsilon|^2 \, dx \\ &- \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left| (v - u^\varepsilon) \sqrt{f^\varepsilon} + 2 \nabla_v \sqrt{f^\varepsilon} \right|^2 \, dv \, dx. \end{aligned}$$

Contrairement au cas précédent, cette égalité ne permet pas de passer directement à la limite même en dimension deux, car on aurait besoin ici d'identifier la limite de $\rho^\varepsilon u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon$ notamment et pas seulement $\rho^\varepsilon u^\varepsilon$; or on n'a pas de compacité sur u^ε dans un espace suffisamment fort pour cela. En effet formellement, le système limite de (2.7) est

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho} + \operatorname{div}(\tilde{\rho} u) = 0, \\ \partial_t(\tilde{\rho} u) + \operatorname{div}(\tilde{\rho} u \otimes u) - \Delta u + \nabla_x P = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

avec $\tilde{\rho} = \rho + 1$ et ρ la limite de ρ^ε , le facteur 1 venant de la normalisation à 1 de la densité du fluide. C'est pourquoi on essaie plutôt d'estimer une entropie relative qui permet de contrôler la distance de $(u^\varepsilon, f^\varepsilon)$ à $(u, M_{\rho,u})$

$$\mathcal{H}(f^\varepsilon, u^\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left(f^\varepsilon \ln \left(\frac{f^\varepsilon}{M_{\rho,u}} \right) + M_{\rho,u} - f^\varepsilon \right) + \int_{\mathbb{R}^d} |u^\varepsilon - u|^2 \, dx,$$

où ρ et u sont les solutions de (2.8) avec comme données initiales les limites de ρ_0^ε et u_0^ε et où $M_{\rho,u}$ est la maxwellienne

$$M_{\rho,u}(t, x, v) = (2\pi)^{-N/2} \rho(t, x) \exp(-|v - u(t, x)|^2/2).$$

Au prix de quelques difficultés techniques on peut alors prouver que

Théorème 2.2.2 *Supposons que les données initiales $(f_0^\varepsilon, u_0^\varepsilon)$ de (2.7) soient telles que $f_0^\varepsilon \geq 0$ et*

$$\sup_{\varepsilon > 0} \left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} f_0^\varepsilon (1 + x^2 + v^2 + |\ln(f_0^\varepsilon)|) dv dx + \int_{\mathbb{R}^d} |u_0^\varepsilon|^2 dx \right) \leq C < \infty.$$

Soit $(\tilde{\rho}_0, u_0) \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\tilde{\rho}_0 > 1$ et

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\tilde{\rho}_0 - 1) dx = \int_{\mathbb{R}^{2d}} f_0^\varepsilon dv dx,$$

et soit $(\tilde{\rho}, u)$ une solution de (2.8) sur $[0, T]$. Alors si

$$\mathcal{H}(f_0^\varepsilon, u_0^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

on a également

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathcal{H}(f^\varepsilon, u^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Ce théorème permet de préciser la limite de f^ε mais il n'est valable que tant que l'on a des solutions régulières à (2.8), ce qui n'est pas connu en temps grand en dimension 3.

2.3 Modèles d'aérosols pour les voies respiratoires

2.3.1 Objectifs et premier modèle

Le but de l'article [34] est le suivant : étant donné un gaz dont on connaît déjà l'écoulement, quel est le modèle réaliste le plus simple possible permettant de calculer le dépôt de particules d'un aérosol sur le bord du domaine d'étude ? Combiné à d'autres aspects essentiels (un maillage des voies respiratoires, des méthodes numériques de résolution de Navier-Stokes etc.), développés dans le cadre du groupe biomécanique numérique des fluides (INRIA, Paris VI, ENS), cela devrait permettre de déterminer à quel endroit des voies respiratoires le principe actif d'un aérosol à but médical se dépose. Comme pour être utile une molécule active doit toucher la zone concernée, cela est essentiel pour déterminer l'efficacité du traitement.

Soit donc donné un écoulement dans un domaine régulier Ω de \mathbb{R}^3 déterminé notamment par son champ de vitesse $u(t, x)$. Suivant Taulbee et Yu [64],

on considère que les deux forces principales agissant sur les particules de l'aérosol sont la gravitation et le frottement avec la vitesse du fluide.

On "oublie" donc tout d'abord un éventuel effet des particules sur le fluide ou toute interaction plus complexe entre les deux phases ; mais aussi l'effet des collisions entre les particules ou de phénomènes de coagulation-fragmentation. Cela reste assez réaliste pourvu que le nuage de particules soit assez dilué ce qui est le cas ici. D'autre part on ne tient pas non plus compte du mouvement brownien ; les particules considérées sont petites ($50 \mu m$ pour les plus grosses) mais pas tant avec une taille inférieure de l'ordre de $5 \mu m$. En dessous de cette taille, il deviendrait nécessaire de prendre en compte le mouvement brownien des particules.

De plus on suppose simplement que toutes les particules qui touchent le bord du domaine sont absorbées.

Finalement le premier modèle de [34], que l'on déduit immédiatement des considérations précédentes, est une équation cinétique sur la densité de particules dans l'espace des phases

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \lambda \operatorname{div}_v((u - v)f) &= 0, \quad (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^d, \\ f(t, x, v) &= 0 \quad \text{si } v \cdot n(x) \leq 0, \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad f(t = 0, x, v) = f^0(x, v). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Le vecteur $n(x)$ désigne la normale extérieure à Ω au point x et le coefficient λ dépend en particulier de la taille des particules et est assez grand devant 1 dans le cas présent.

Bien qu'elle soit linéaire l'équation (3.1) ne permet pas une résolution si rapide, tout simplement parce qu'elle se place dans l'espace des phases. Comme dans la partie précédente, il serait préférable d'avoir à la place un modèle macroscopique.

Une première idée serait donc de prendre une limite $\lambda \rightarrow +\infty$. Cela fonctionne sans trop de difficulté (voir [34] pour les détails) et on obtient simplement l'équation suivante sur la densité macroscopique ρ

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0.$$

Or typiquement $u \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$ (si u est solution de l'équation d'Euler ou Navier-Stokes en particulier) et ainsi l'équation précédente a pour conséquence qu'aucune particule ne se dépose sur $\partial\Omega$. Cela n'a rien d'absurde et correspond à ce qui est effectivement observé, c'est-à-dire que plus les particules sont petites plus elles mettent de temps à se déposer sur la

paroi (et plus elles se déposent loin). Par contre cela signifie que pour ce qui nous intéresse, il y a une certaine différence entre un grand coefficient de frottement et un coefficient infini...

2.3.2 Aérosols très dilués

En général les particules de produit actif sont en faible densité dans l'aérosol. La description cinétique en est d'autant moins appropriée puisque dans une cellule d'espace on ne trouve peut-être qu'une seule particule. On est donc amené à choisir comme données initiales des distributions monocinétiques à savoir

$$f^0(x, v) = \rho^0(x) \delta(v - V^0(x)). \quad (3.2)$$

Bien entendu V^0 n'est définie que sur $\Omega^0 = \{x \in \Omega \mid \rho^0(x) > 0\}$. Posons donc

$$\Omega^t = \{x \in \Omega \mid \rho(t, x) > 0\}, \quad (3.3)$$

avec comme d'habitude $\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv$ et f la solution de (3.1) avec (3.2). Dans toute la suite on supposera que

$$u \in L^\infty([0, T], W^{1,\infty}(\Omega)), \quad (3.4)$$

ce qui implique qu'il existe bien une unique solution dans les mesures à (3.1). Il paraît raisonnable de supposer que f reste monocinétique sur un certain intervalle de temps $[0, T]$ c'est-à-dire que

$$f(t, x, v) = \rho(t, x) \delta(v - V(t, x)), \quad (3.5)$$

avec

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &\in L^\infty([0, T], L^1(\Omega)), \\ \Omega^t &\subset \Omega \text{ est ouvert de frontière Lipschitz,} \\ V(t, x) &\in L^\infty([0, T], W^{1,\infty}(\Omega^t)). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dans ce cas on peut remplacer (3.1) par le système suivant

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho V) &= 0, \\ \partial_t V + V \cdot \nabla_x V &= \lambda(u - V), \quad \text{dans } \Omega^t, \\ V(t, x) \cdot n(x) &\geq 0, \quad \forall x \in \partial\Omega \cap \Omega^t. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Il s'agit en fait d'un problème de frontière libre puisque la frontière de Ω^t se déplace elle-même à la vitesse $V(t, x)$. Le système (3.7) est très satisfaisant, la question se réduit donc à savoir sur quel intervalle de temps il peut remplacer (3.1). Il est facile de vérifier le point suivant

Théorème 2.3.1 *Le système (3.7) admet une solution vérifiant (3.6) sur $[0, T]$ si et seulement si l'unique solution f de (3.1) avec (3.2) vérifie (3.5) sur $[0, T]$.*

Le système (3.7) est seulement un système de gaz sans pression avec un terme de frottement. Or il est connu qu'il n'existe pas de solutions fortes en temps grand aux équations des gaz sans pression, ce qui a conduit à développer une théorie plus faible en dimension 1 avec des articles de Brenier, Grenier [12] et Bouchut, James [10]. Toutefois ici cette approche est mal indiquée d'abord parce qu'il n'existe pas de théorie semblable en dimension deux ou plus et ensuite parce que ces résultats supposent que lorsque deux particules se touchent elles se "collent" et restent collées, ce qui est une hypothèse peu réaliste ici.

D'autre part lorsque le frottement est grand, il peut suffire à empêcher la collision de deux particules ce qui veut dire que (3.7) est en fait plus régulier qu'un système de gaz sans pression.

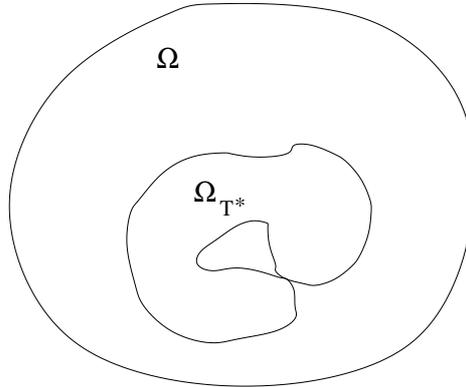
Le seul problème qui reste est lié à la frontière libre ce qui conduit à définir un temps T^* de la manière suivante. L'ensemble Ω^t est défini seulement à l'aide de ρ donc on regarde l'évolution de Ω^t en résolvant (3.1) et on définit T^* le premier temps tel que deux points de $\partial\Omega^t$ se touchent, voir la figure 2.1. On peut alors prouver que

Théorème 2.3.2 *Supposons que $\rho^0 \in L^1(\Omega)$ et que*

$$\begin{aligned} \{x \in \Omega, \rho^0(x) > 0\} \subset \Omega \text{ est ouvert avec une frontière Lipschitz,} \\ \|V^0\|_{W^{1,\infty}(\Omega_0)} \leq \frac{\lambda}{2d}, \quad \rho^0 V^0 \cdot n \geq 0 \text{ on } \partial\Omega, \\ \|u\|_{L^\infty([0, T], W^{1,\infty}(\Omega))} \leq \frac{\lambda}{4d}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Alors il existe un unique triplet (ρ, V, Ω_t) défini sur l'intervalle de temps maximal $[0, T^)$, vérifiant (3.6) et solutions de (3.7).*

D'un point de vue pratique, les conditions (3.8) sont généralement satisfaites et le théorème 2.3.2 indique que l'on peut tranquillement résoudre (3.7) jusqu'à arriver au point illustré sur la figure 2.1.

FIG. 2.1 – *Définition du temps T^* .*

2.4 Modèles de coagulation-fragmentation

Les phénomènes de coagulation ou de fragmentation doivent souvent nécessairement être pris en compte lorsque l'on modélise la dynamique de particules dans un fluide. L'étude précédente a d'ailleurs montré que même s'il s'agit d'un évènement rare, on peut avoir à décider ce qui se passe en cas de collision.

2.4.1 Modélisation des phénomènes de fragmentation

Il s'agit ici de fragmentation linéaire. C'est-à-dire qu'une particule, typiquement pour des raisons d'instabilité interne, subit un processus de fragmentation pour donner naissance à de nouvelles particules (deux en général) sans que cela doive être provoqué. D'autres phénomènes de fragmentation existent également pour lesquels par exemple la séparation est induite par une collision.

Le problème est évidemment en premier lieu de déterminer à quelle fréquence une particule de masse m et de quantité de mouvement p se décompose en une particule de paramètres m', p' et une autre de paramètres m^*, p^* et quelles sont les relations entre ces variables. La chose la plus naturelle est de prendre

$$m = m' + m^*, \quad p = p' + p^*, \quad (4.1)$$

mais autant la conservation de la masse est certaine, autant il n'est pas sûr

que la quantité de mouvement reste constante, des échanges pouvant a priori avoir lieu avec le fluide au cours même de la fragmentation.

De plus les instabilités ou déformations internes n'apparaissent pas toutes seules. Comprendre comment l'interaction avec le fluide les génère et à quel rythme est probablement l'enjeu principal et cela nécessitera vraisemblablement d'introduire de nouveaux paramètres décrivant l'état interne de la particule.

Quelques modèles de fragmentation ont déjà été écrits par Hylkema et Villedeu [32] ou le modèle T.A.B. qui est assez connu et utilisé (voir la description par C. Baranger [2]) mais il ne décrivent pas précisément l'interaction avec le fluide.

En comparaison l'obtention de résultats d'existence des solutions une fois le modèle écrit est plus facile (voir [42] dans un cadre assez général). Par contre la théorie d'existence pour des modèles de coagulation inhomogènes en espace et cinétiques est beaucoup plus délicate. Un travail dans ce sens est en cours avec C. Klingenberg et Escobedo, Laurençot et Mischler [24] ont un résultat avec une méthode assez différente.

Enfin je m'intéresse ici uniquement à des modèles cinétiques, c'est-à-dire des modèles où les vitesses de la particule mère et des particules filles sont prises en compte. Il existe déjà de nombreux travaux si l'on considère seulement la masse des particules, dans un cadre déterministe comme ici mais aussi probabiliste comme notamment dans les articles de Bertoin [6] et [7].

2.4.2 Retour vers l'équilibre des équations de Becker-Döring

Le modèle de Becker-Döring s'intéresse à des particules dont les tailles sont discrètes et les équations décrivent l'évolution de nombre de particules $c_l(t)$ pour chaque taille $l = 1 \dots \infty$. L'hypothèse principale est que la taille d'une particule ne peut varier que d'une unité à la fois d'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}c_l(t) &= J_{l-1}(t) - J_l(t), \quad l \geq 2, \\ J_l(t) &= a_l c_1(t) c_l(t) - b_{l+1} c_{l+1}(t). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Les coefficients a_l et b_l sont donnés et le nombre de monomères $c_1(t)$ joue un rôle particulier. Dans l'article original de Becker et Döring [4], c_1 était supposé constant en temps mais il est plus réaliste de supposer que la masse

totale est conservée comme l'ont fait Penrose et Lebowitz [55] et Burton [13]

$$\rho = \sum_{l=1}^{\infty} c_l(t) = \text{const.} \quad (4.3)$$

En dépit de ses aspects très simples, ce modèle est utile pour décrire un certain nombre de phénomènes de transition de phase.

L'existence de solutions positives de (4.2) est prouvée par Ball, Carr et Penrose dans [1] sous des conditions assez générales ($a_l = O(l)$) tandis que l'unicité est un peu plus "exigeante" (voir Laurençot et Mischler [49]).

Il existe une masse critique ρ_s (qui peut être infinie selon le choix de a_l , b_l , constants par exemple) telle que pour chaque masse $\rho \leq \rho_s$ il existe un unique état d'équilibre. Par conséquent si la masse de départ ρ est inférieure à ρ_s , la solution $(c_l)_{l \geq 1}$ converge en norme l^1 vers l'état d'équilibre correspondant (voir [1]). Si $\rho \geq \rho_s$ alors chaque coefficient c_l converge vers le coefficient de l'état d'équilibre correspondant à la masse ρ_s et l'excès de masse est perdu dans les agrégats de taille infinie.

L'article [35] a pour but de déterminer la vitesse de convergence vers l'équilibre dans le cas sous-critique. Dans le cas sur-critique, l'existence d'états métastables (voir Penrose [54]) complique beaucoup l'analyse et le taux de convergence que l'on peut espérer est nettement moins bon. Mais bien entendu c'est le cas le plus intéressant et la principale question ouverte.

On se place désormais dans le cas $\rho < \rho_s$. Définissons

$$Q_1 = 1 \quad \text{et} \quad b_{l+1} Q_{l+1} = a_l Q_l \quad \text{pour } l > 1,$$

alors les états d'équilibre s'écrivent

$$\bar{c}_l = Q_l z^l,$$

pour tout

$$z < z_s = \lim_l Q_l^{-1/l}.$$

Le système (4.2) dispose d'une fonctionnelle de Lyapunov qui est l'énergie libre et que l'on peut écrire comme

$$F(t) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l \ln \left(\frac{c_l}{\bar{c}_l} \right) + \bar{c}_l - c_l. \quad (4.4)$$

Alors sous les hypothèse suivantes

$$\begin{aligned} a_l, b_l \geq 1 \quad \forall l \geq 1, \quad a_l, b_l = O(l), \quad a_l z_s \leq \min(b_l, b_{l+1}), \\ \exists \mu > 1 \quad \text{tq} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l c_l(0) < \infty, \end{aligned} \quad (4.5)$$

on peut montrer que

Théorème 2.4.1 *Supposons que a_l, b_l et $c_l(0)$ vérifient (4.5) alors il existe une constante c_0 telle que*

$$F(t) \leq F(0) e^{-c_0 t^{1/3}}.$$

L'idée de la preuve est directement inspirée de l'équation de Fokker-planck homogène

$$\partial_t f(t, v) = \nabla_v \cdot (\nabla_v + v f). \quad (4.6)$$

En effet en définissant l'entropie

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f \ln \left(\frac{f}{e^{-|v|^2/2}} \right) + e^{-|v|^2/2} - f,$$

et pourvu que la normalisation soit correcte on obtient

$$\frac{d}{dt} H(t) = -I(t) = - \int_{\mathbb{R}^d} f \left| \nabla_v \ln \frac{f}{e^{-|v|^2/2}} \right|^2 dv.$$

On conclut alors en utilisant une inégalité de Sobolev logarithmique développée par Stam [63] qui implique que

$$H(t) \leq \frac{1}{2} I(t).$$

Or dans le cas présent, on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(t) = -D(t) = - \sum_{l=1}^{\infty} b_{l+1} Q_{l+1} c_1^{l+1} \left(\frac{c_l}{Q_l c_1^l} - \frac{c_{l+1}}{Q_{l+1} c_1^{l+1}} \right) \\ \times \ln \left(\frac{c_l}{Q_l c_1^l} \times \frac{Q_{l+1} c_1^{l+1}}{c_{l+1}} \right), \end{aligned}$$

qui est juste une version discrète de ce que l'on a pour Fokker-Planck à deux exceptions. La première, qui n'est pas grave, est qu'ici ce ne sont pas

les vrais équilibres qui apparaissent dans la dissipation mais des équilibres locaux basés sur c_1 . La deuxième, sérieuse, est que la mesure de référence n'est pas une gaussienne mais une exponentielle. Malheureusement le cas limite pour obtenir une inégalité de Sobolev logarithmique est celui d'une mesure de Poisson (voir Ledoux [50]) ce qui nous oblige ici à des hypothèses supplémentaires et à se contenter d'une presque inégalité (donnée dans la sous-partie suivante dans un cadre continu).

Notons enfin que ce n'est pas la première occasion où la théorie cinétique s'applique aux questions de coagulation-fragmentation comme dans [48] par exemple. De plus même dans un cadre purement cinétique, dériver de bonnes inégalités entre le taux de dissipation de l'entropie et l'entropie n'est pas toujours simple, on pourra se reporter à l'ouvrage de Villani [65] notamment.

2.4.3 Une presque inégalité de Sobolev logarithmique

Le but de cette sous-partie est d'expliquer comment on peut obtenir l'inégalité fondamentale de [35]. On se place dans un cadre continu qui permet de présenter les idées plus facilement et de les comparer aux méthodes et aux résultats habituels.

Il s'agit donc de prouver une forme faible d'inégalité de Sobolev logarithmique modifiée pour une mesure de densité $\mu(x)$. Pour une fonction $f(x)$ positive, on définit l'entropie par rapport à la mesure correspondante par

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}^+} (f(x) \log f(x) + 1 - f(x)) \mu(x) dx.$$

Le taux de dissipation associé s'écrit

$$D(f) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|f'(x)|^2}{f(x)} \mu(x) dx.$$

Si la fonction f est correctement normalisée par

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \mu(x) dx, \quad f(0) = 1, \quad (4.7)$$

et si μ est une mesure gaussienne

$$\mu(x) = C e^{-|x|^2/\nu},$$

alors on a l'inégalité de Sobolev logarithmique classique

$$H(f) \leq CD(f).$$

Dans le cas où μ n'est plus une gaussienne mais si f est un peu plus régulière, soit $f \in L^p(\mu dx)$ pour un exposant $p > 1$ et si μ satisfait la condition suivante, qui indique que cette mesure décroît au moins de manière quasi-exponentielle à l'infini

$$\exists C > 0, \quad \int_x^\infty \mu(y) dy \leq C\mu(x), \quad (4.8)$$

il est possible d'obtenir la forme affaiblie suivante

$$H(f) \times (1 + |\log H(f)|)^{-2} \leq C(\|f\|_{L^p(\mu dx)}, D(f)) D(f), \quad (4.9)$$

où la constante C est uniformément bornée pourvu que $\|f\|_{L^p}$ et $D(f)$ le soient.

Pour la preuve, On commence de la même manière que dans le cas où on impose la condition $f'(x) \leq 1$ (voir [50]), par une intégration par partie, en remarquant que le terme de bord disparaît grâce à (4.7)

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}^+} f'(x) \times \log f(x) \times \nu(x) dx,$$

avec

$$\nu(x) = \int_x^\infty \mu(y) dy.$$

On divise ensuite la preuve en deux cas : sur l'ensemble $\Omega^- \subset \mathbb{R}^+$ où $f(x)$ est inférieure à 1 et sur l'ensemble Ω^+ où elle y est supérieure.

Les points où $f(x) \leq 1$

Il s'agit du cas facile qui ressemble (en beaucoup plus simple) à celui où on impose la condition $f'(x) \leq 1$. Après un Cauchy-Schwarz, on obtient

$$H^-(f) \leq \left(\int_{\Omega^-} \frac{|f'(x)|^2}{f(x)} \nu(x) dx \right)^{1/2} \times \left(\int_{\Omega^-} f(x) |\log f(x)|^2 \nu(x) dx \right)^{1/2}.$$

Il suffit désormais de remarquer que si $\alpha < 1$

$$\alpha |\log \alpha|^2 \leq 2(\alpha \log \alpha + 1 - \alpha),$$

pour avoir

$$H^-(f) \leq 2 \int_{\Omega^-} \frac{|f'(x)|^2}{f(x)} \nu(x) dx \leq 2C D(f), \quad (4.10)$$

d'après la condition (4.8) sur μ .

Les points où $f(x) \geq 1$

On utilise tout d'abord la relation élémentaire

$$\log \beta \leq 2(\beta - 1) \frac{\log(1 + \beta)}{\beta}, \quad \forall \beta > 1.$$

On en déduit que

$$H^+(f) \leq \int_{\Omega^+} |f'(x)| \times |f(x) - 1| \times \frac{\log(1 + f(x))}{f(x)} \nu(x) dx.$$

Il s'agit maintenant de faire une espèce d'interpolation de cette dernière intégrale entre $D(f)$ et $\|f\|_{L^p}$. Donc pour tout $\lambda > 1$, on découpe l'intégrale

$$H^+(f) \leq \int_{1 < f(x) < \lambda} |f'(x)| \times |f(x) - 1| \times \frac{\log(1 + f(x))}{f(x)} \nu(x) dx + \int_{f(x) \geq \lambda} \dots$$

Pour la première intégrale

$$\begin{aligned} & \int_{1 < f(x) < \lambda} |f'(x)| \times |f(x) - 1| \times \frac{\log(1 + f(x))}{f(x)} \nu(x) dx \\ & \leq \log(1 + \lambda) \times \int_{f(x) > 1} |f'(x)| \times \frac{f(x) - 1}{f(x)} \nu(x) dx \\ & \leq \log(1 + \lambda) \times \left(\int_{\mathbb{R}^+} \frac{|f'(x)|^2}{f(x)} \nu(x) dx \right)^{1/2} \\ & \quad \times \left(\int_{f(x) > 1} \frac{|f(x) - 1|^2}{f(x)} \nu(x) dx \right)^{1/2} \\ & \leq \log(1 + \lambda) \times (D(f))^{1/2} \times \left(\int_{f(x) > 1} \frac{|f(x) - 1|^2}{f(x)} \nu(x) dx \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

d'après (4.8). Or on sait que

$$\frac{|\beta - 1|^2}{\beta} \leq 2(\beta \log \beta + 1 - \beta), \quad \forall \beta > 1,$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{1 < f(x) < \lambda} |f'(x)| \times |f(x) - 1| \times \frac{\log(1 + f(x))}{f(x)} \nu(x) dx \\ \leq 2C \log(1 + \lambda) (D(f) H(f))^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Il est à noter que l'on est toujours dans le “bon cas”, c'est-à-dire que si l'on pouvait fixer λ (si f était dans L^∞), on aurait bien une vraie inégalité de Sobolev logarithmique. Pour la deuxième intégrale, soit C la constante telle que

$$\log(1 + \beta) \leq C\beta^{(p-1)/4}, \quad \forall \beta > 1.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_{f(x) > \lambda} |f'(x)| \times |f(x) - 1| \times \frac{\log(1 + f(x))}{f(x)} \nu(x) dx \\ \leq \int_{f(x) > \lambda} |f'(x)| \times |f(x) - 1| \times \frac{|f(x)|^{(p-1)/4}}{f(x)} \nu(x) dx \\ \leq \int_{f(x) > \lambda} |f'(x)| \times |f(x)|^{(p-1)/4} \nu(x) dx \\ \leq \lambda^{-(p-1)/4} \int_{\mathbb{R}^+} |f'(x)| \times |f(x)|^{(p-1)/2} \nu(x) dx \\ \leq \lambda^{-(p-1)/4} \left(\int_{\mathbb{R}^+} \frac{|f'(x)|^2}{f(x)} \nu(x) dx \right)^{1/2} \\ \times \left(\int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^{p-1+1} \nu(x) dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Grâce encore à (4.8), on trouve

$$\begin{aligned} \int_{f(x) > \lambda} |f'(x)| \times |f(x) - 1| \times \frac{\log(1 + f(x))}{f(x)} \nu(x) dx \\ \leq \lambda^{-(p-1)/4} \times (D(f))^{1/2} \times \|f\|_{L^p(\mu dx)}^{p/2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

En minimisant la somme de (4.11) et (4.12), *i.e.* en prenant $\lambda^{-(p-1)/4} = (H(f))^{1/2}$ (ou 1 si $H(f)$ est très grand), on aboutit enfin à

$$H^+(f) \leq C(D(f), \|f\|_{L^p(\mu dx)}) \times D(f) \times (1 + |-\log H(f)|)^2. \quad (4.13)$$

La combinaison de (4.10) et (4.13) amène bien à (4.9).

Chapitre 3

Mathématiques pour la biologie

Ce chapitre présente deux travaux en immunologie et conclut en indiquant des développements futurs en écologie.

3.1 Pourquoi de nouveaux modèles en immunologie

Les mathématiques peuvent intervenir soit pour déterminer comment se répand une maladie dans une population donnée (il s'agit alors d'épidémiologie) soit pour évaluer l'évolution d'une maladie dans le corps d'un individu. C'est seulement ce deuxième aspect qui est traité dans [25] et [16] et dont on parlera ici.

Il s'agit de modéliser l'interaction entre le système immunitaire et un hôte étranger (virus, bactéries ou même tumeur). Le modèle le plus simple consiste à prendre une équation du type proie-prédateur sur le nombre de virus $v(t)$ et le nombre de lymphocytes $l(t)$ telle que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}v(t) &= a v(t) - b l(t) v(t), \\ \frac{d}{dt}l(t) &= -c l(t) + d l(t) v(t).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Bien entendu ce modèle peut être précisé et complété mais cela reste un système différentiel avec deux espèces (parfois un peu plus). On pourra se référer aux livres de May et Novak [52] ou de Dieckmann et Heesterbeek [21] pour une description et des exemples de modèles de ce type.

Un système comme (1.1) est assez simple et généralement bien adapté au moins au début de l'évolution d'une maladie. Toutefois il s'avère incapable de prendre en compte certains comportements plus complexes. L'évolution d'un SIDA est un exemple typique : après une phase initiale, l'infection est rapidement contrôlée par l'organisme et reste mineure pendant très longtemps (cinq à dix ans parfois sans traitement) pour finir par reprendre brusquement à un moment donné et tuer le malade. Cette dernière phase de remontée ne peut être modélisée que de manière assez artificielle par des équations du type (1.1) (en incluant au départ dans les équations des termes dépendant du temps qui vont la créer).

Il semble ainsi qu'il soit parfois nécessaire de tenir compte des différentes sous-populations de virus ou de lymphocytes en ajoutant un paramètre supplémentaire. On a alors deux possibilités ; soit le paramètre permettant de différencier les sous-populations est un paramètre de forme, c'est-à-dire par exemple qu'un lymphocyte d'une forme donnée ne peut s'attaquer qu'à des virus ayant une forme compatible. Soit ce paramètre décrit les différences de virulence ou d'efficacité des sous-population.

3.2 Différentiation par virulence

Le modèle analysé dans [16] avait été développé par De Angelis et Mesin [17] pour comprendre la phase initiale de l'évolution d'une tumeur mais s'applique également à d'autres situations.

On classe chaque sous-population en fonction de sa virulence (pour un virus) ou de son efficacité (pour un lymphocyte) par un paramètre u (appelé activité en général). Ce paramètre peut varier continûment de 0 à l'infini. En plus de déterminer les taux de naissance et de mort de chaque sous-population il faut aussi expliciter l'évolution de ce paramètre d'activité. Par exemple, la présence de virus induit la réplication des lymphocytes mais l'interaction avec les virus diminue par ailleurs l'efficacité de ces lymphocytes.

D'autre part en plus de la densité de virus $f_1(t, u)$ et de lymphocytes $f_2(t)$, on introduit une fonction $A_3(t)$ représentant l'état de santé général du reste de l'organisme et par suite sa capacité à fournir de la nourriture à l'hôte étranger (il s'agit notamment des cellules endothéliales pour une tumeur). On définit d'abord

$$A_1(t) = \int_0^\infty u f_1(t, u) du, \quad A_2(t) = \int_0^\infty u f_2(t, u) du. \quad (2.1)$$

Bien entendu il n'est pas possible de mesurer biologiquement les valeurs des f_i mais les A_i bien qu'étant les quantités macroscopiques importantes ne sont pas davantage accessibles. Ce que l'on peut mesurer, ce sont seulement les nombres totaux qui sont définis par

$$n_1(t) = \int_0^\infty f_1(t, u) du, \quad n_2(t) = \int_0^\infty f_2(t, u) du. \quad (2.2)$$

Le système s'écrit alors

$$\begin{aligned} \partial_t f_1 + \partial_u (-\alpha_{12} u A_2 f_1 + \alpha_{13} u A_3 f_1) \\ &= -\beta_{12} A_2 f_1 + \beta_{13} u A_3 f_1, \\ \partial_t f_2 + \partial_u (-\alpha_{21} u A_1 f_2) &= \beta_{21} u A_1 f_2, \\ \frac{d}{dt} A_3 &= -(\beta_{31} + \alpha_{31}) A_1 A_3. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Le système (2.3) est non linéaire mais le couplage par (2.1) est faible et les non linéarités ne posent pas de difficulté en tant que telles. Le point délicat pour l'existence de solutions concerne le comportement à l'infini. En effet il est nécessaire d'obtenir une borne sur le premier moment (les A_i) mais si l'on essaie de dominer $\int |u|^k f_i$ directement on s'aperçoit qu'intervient le moment d'ordre supérieur.

La bonne échelle est en fait l'échelle exponentielle. Ainsi on peut prouver a priori que

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty e^{\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} u} f_2(t, u) du = 0.$$

On est conduit à faire les hypothèses suivantes

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{\lambda u} f_1^0(u) du &< \infty, \quad \forall \lambda > 0, \\ \int_0^\infty e^{\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} u} f_2^0(u) du &< \infty, \\ A_3^0 &< \infty, \end{aligned} \quad (2.4)$$

ce qui permet d'obtenir

Théorème 3.2.1 *Supposons que f_1^0 , f_2^0 et A_3^0 vérifient (2.4), alors il existe des solutions f_1 , f_2 , A_3 de (2.3) au sens des distributions avec f_1^0 , f_2^0 et A_3^0*

comme données initiales et telles que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{\lambda u} f_1(t, u) du &\in L^\infty([0, T]), \quad \forall \lambda, T > 0, \\ \int_0^\infty e^{\beta_{21} u / \alpha_{21}} f_2(t, u) du &\leq \int_0^\infty e^{\beta_{21} u / \alpha_{21}} f_2^0(u) du, \\ A_3(t) &\leq A_3^0. \end{aligned}$$

On peut d'ailleurs prouver qu'une hypothèse de type décroissance exponentielle est nécessaire, voir [16]. Mais du point de vue des applications en biologie, le point important est plutôt l'étude du comportement asymptotique. Posons

$$n_2^* = \int_0^\infty e^{\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} u} f_2^0(u) du,$$

alors

Théorème 3.2.2 *Considérons une solution telle qu'elle est donnée par le théorème précédent alors quand $t \rightarrow \infty$, on n'a que les deux possibilités*
(i)

$$n_1(t) \longrightarrow 0, \quad \int_0^\infty A_1(t) dt < \infty, \quad n_2(t) \longrightarrow n_2(\infty) < \int_0^\infty e^{\beta_{21} u / \alpha_{21}} f_2^0(u) du,$$

et n_3, A_3, n_2, A_2 sont minorés.

(ii)

$$\int_0^\infty A_1(t) dt = \infty, \quad n_2(t) \longrightarrow \int_0^\infty e^{\beta_{21} u / \alpha_{21}} f_2^0(u) du, \quad A_2(t), n_3(t), A_3(t) \longrightarrow 0.$$

Ce théorème signifie que soit le système immunitaire détruit tous les virus soit les virus l'emportent, il ne peut y avoir de maladies chroniques (mais des cas de type SIDA sont parfaitement possibles et observés lors des simulations numériques). De plus un trait caractéristique intéressant est le nombre maximal de lymphocyte n_2^* . Lorsque le système immunitaire a produit ce nombre maximal, il est épuisé et le malade finit par mourir.

Bien sûr cela est dû au fait que (2.3) a été dérivé pour être appliqué sur des échelles de temps où l'organisme ne peut pas récupérer.

Les principales questions ouvertes autour de ce modèle portent d'une part sur l'inclusion de termes modélisant les thérapies et la détermination des

nouveaux comportements asymptotiques. D'autre part on peut aussi tenter de corriger le modèle pour le rendre valable également sur des échelles de temps plus grandes et analyser alors les différences; cela fait l'objet de la thèse de L. Derbel.

3.3 Différentiation par forme

La première étape de la modélisation dans [25] est de "corriger" (1.1) pour avoir un modèle réaliste dans le cas d'une seule espèce de virus et une seule espèce de lymphocyte. Le nouveau système est

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \left(\sigma - \frac{\alpha l}{1+v} \right) v, \\ \frac{dl}{dt} &= \left(\Sigma \left(\frac{\eta + v}{l} \right) - \beta \right) l.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Les virus se reproduisent toujours avec un taux constant (mais qui dépendra de la sous-espèce), par contre leur taux de mortalité a été limité ce qui correspond au fait qu'un lymphocyte ne peut attaquer et tuer qu'un nombre limité de virus même si ceux-ci sont exagérément nombreux.

Les lymphocytes ont un taux de mortalité constant et un taux de naissance qui est une fonction Σ de la quantité de nourriture disponible par lymphocyte. Cette quantité est égale au nombre de virus présent plus une nourriture constante fournie par l'organisme qui rend compte de ce que même en l'absence de virus, il existe quand même des lymphocytes; le tout doit bien entendu être divisé par le nombre de lymphocytes.

Dans le cas où l'on a plusieurs sous-espèces décrites par un paramètre continu μ (dans un intervalle ou sur \mathbb{R}), le système devient simplement

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= \sigma(\mu) \left((1 - \theta) v(\mu) + \theta K[v](\mu) \right) - \frac{\alpha(\mu) l(\mu)}{1 + v(\mu)} v(\mu), \\ \frac{\partial l}{\partial t} &= \left(\Sigma \left(\frac{\eta(\mu) + v(\mu)}{l} \right) - \beta \right) l,\end{aligned}\tag{3.2}$$

où le paramètre θ est le taux de mutation du virus et

$$K[v](\mu) = \int K(\mu, \mu') v(\mu') d\mu'.$$

Le noyau K décrit la probabilité de mutation d'un trait à un autre et il est donc positif et normalisé

$$\int K(\mu, \mu') d\mu = \int K(\mu, \mu') d\mu' = 1. \quad (3.3)$$

L'analyse du comportement asymptotique de (3.2) n'est pas simple. La première étape est de déterminer les états stationnaires. C'est très facile pour (3.1) où l'on trouve pour (v, l)

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = \left(0, \frac{\eta}{\Sigma^{-1}(\beta)}\right), \quad P_3 = \left(\frac{\kappa - \eta}{1 - \kappa}, \frac{\sigma}{\alpha} \frac{1 - \eta}{1 - \kappa}\right), \quad \kappa(\mu) = \frac{\sigma}{\alpha} \Sigma^{-1}(\beta). \quad (3.4)$$

Pour que ces équilibres aient un sens (qu'ils existent et soient dans le cadran positif), il est nécessaire d'imposer certaines conditions, à savoir

$$\begin{aligned} \Sigma(0) = 0, \quad \Sigma'(s) > 0, \quad \Sigma''(s) \leq 0, \quad \beta < \Sigma_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \Sigma(s) < \infty, \\ \lim_{s \rightarrow \infty} s\Sigma'(s) = 0, \quad \inf_{\mu} (\kappa(\mu) - \eta(\mu)) > 0, \quad \sup_{\mu} \kappa(\mu) < 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

On peut alors vérifier que les stationnaires de (3.2) dans $Q_+ = \{(v, l) \mid v > 0, l > 0\}$ sont seulement une déformation de P_3

Théorème 3.3.1 *On suppose que (3.5) est vrai. Alors il existe une solution stationnaire $(v_s t, l_s t) \in (L^\infty(\mathbb{R}))^2$ de (3.2) à valeur dans Q_+ et telle que*

$$0 < \min_{\mu} \frac{\kappa(\mu) - \eta(\mu)}{1 - \kappa(\mu)} \leq v_s t(\mu), \quad \forall \mu.$$

De plus si θ est suffisamment petit, cette solution est unique.

Bien entendu trouver un état stationnaire ne signifie pas que la solution y converge. En fait ce point est assez délicat comme nous n'avons pas pu trouver de fonctionnelle de Lyapunov pour (3.2) ou (3.1) d'ailleurs. Une réponse partielle est donnée dans [25] où sous des hypothèses additionnelles et en particulier si θ est assez petit, on montre qu'effectivement il y a convergence vers le point d'équilibre.

3.4 Perspectives en théorie de l'évolution

Il s'agit de travaux en cours avec O. Diekmann, S. Mischler et B. Perthame. Le but est d'arriver à expliquer comment sur des modèles simples, on peut voir apparaître un phénomène de spéciation c'est-à-dire que d'une infinité de traits possibles existant dans une population initiale, l'évolution en sélectionne seulement un nombre fini et de comprendre comment le ou les traits choisis évoluent.

On se place donc à l'échelle de temps de l'évolution et on suppose que cette échelle est très grande par rapport au temps de vie d'un individu. Ainsi on peut par exemple étudier l'équation

$$\frac{d}{dt}x_\varepsilon(t, \alpha) = \frac{1}{\varepsilon}[r(\alpha)x(t, \alpha) - \varrho_\varepsilon(t)x_\varepsilon(t, \alpha) + \int_{\alpha' \in \mathbb{R}} K_\varepsilon(\alpha - \alpha')x_\varepsilon(t, \alpha')d\alpha']. \quad (4.1)$$

Dans ce cas par exemple, la limite est représentée par une équation de Hamilton-Jacobi qui permet de décrire exactement l'évolution des traits dominants.

Cette approche est à comparer avec celle de la dynamique adaptative. Bien qu'elle soit plus compliquée, un de ses avantages est qu'elle permet de décrire les bifurcations (lorsqu'un trait dominant mène à deux sous-populations).

Publications

Je donne ici la liste de mes articles qui sont résumés dans ce mémoire sans mentionner les articles de ma thèse.

1. E. De Angelis et P.E. Jabin, Qualitative analysis of a mean field model of tumor-immune system competition. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, vol. 13, 2003, pp. 187–206.
2. H. Frid, P.E. Jabin et B. Perthame, Global Stability of Steady Solutions for a Model in Virus Dynamics. *Math. Model. Numer. Anal.*, à paraître.
3. T. Goudon, P.E. Jabin et A. Vasseur, Hydrodynamic limits for Vlasov-Stokes equations. Part I : Light Particles Regime. *Preprint*.
4. T. Goudon, P.E. Jabin et A. Vasseur, Hydrodynamic limits for Vlasov-Stokes equations. Part II : Fine Particles Regime. *Preprint*.
5. M. Hauray et P.E. Jabin, N-particles approximation of the Vlasov-Poisson equation with singular potentials. *Preprint*.
6. P.E. Jabin, Various levels of models for aerosols. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, vol. 12, 2002, pp. 903–919.
7. P.E. Jabin et B. Niethammer, On the rate of convergence to equilibrium in the Becker-Dring equations. *J. Differential Equations*, vol. 191, 2003, pp. 518–543.
8. P.E. Jabin, F. Otto et B. Perthame, Line-energy Ginzburg-Landau models : zero-energy states. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, vol. 5, 2002, pp. 187–202.
9. P.E. Jabin et B. Perthame, Compacité par lemmes de moyenne cinétiques pour des énergies de Ginzburg-Landau. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, vol. 331, 2000, pp. 441–445.
10. P.E. Jabin et B. Perthame, Compactness in Ginzburg-Landau energy by kinetic averaging. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 54, 2001, pp. 1096–1109.

11. P.E. Jabin et B. Perthame, Kinetic methods for Line-energy Ginzburg-Landau models. *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 2001–2002*, Exposé XIII, École Polytech., Palaiseau, 2002.
12. P.E. Jabin et J. Soler, A Kinetic Description of Particle Fragmentations. *Preprint*.
13. P.E. Jabin et L. Vega, A Real Space Method for Averaging Lemmas. *Preprint*.
14. P.E. Jabin et L. Vega, Lemmes de moyenne et transformée aux rayons X. *C.R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math.*, à paraître.

Bibliographie

- [1] Ball (J.), Carr (J.) et Penrose (O.). – The Becker–Döring Cluster Equations : Basic Properties and Asymptotic Behaviour of Solutions. *Comm. Math. Phys.*, vol. 104, 1986, pp. 657–692.
- [2] Baranger (C.). – Modeling of the breakup, collision and coalescence kernel of droplets by the T.A.B. model. *In : Workshop on "Numerical and asymptotic methods for kinetic equations"*. – University of Saarbrücken, Germany, Nov 29 - Dec 1, 2001.
- [3] Batt (Jürgen). – N -particle approximation to the nonlinear Vlasov-Poisson system. *In : Proceedings of the Third World Congress of Non-linear Analysts, Part 3 (Catania, 2000)*, pp. 1445–1456.
- [4] Becker (R.) et Döring (W.). – Kinetische Behandlung der Keimbildung in übersättigten Dämpfen. *Ann. Phys. (Leipzig)*, vol. 4, 1935, pp. 719–752.
- [5] Berthouaud (P.). – Limites fluides pour des modèles cinétiques de brouillards de gouttes monodispersés. *C. R. Acad. Sci.*, vol. 331, 2000, pp. 651–654.
- [6] Bertoin (J.). – Homogeneous fragmentation processes. *Probab. Theory Related Fields*, vol. 121, n° 3, 2001, pp. 301–318.
- [7] Bertoin (J.). – Self-similar fragmentations. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, vol. 38, n° 3, 2002, pp. 319–340.
- [8] Bouchut (F.). – Existence and uniqueness of a global smooth solution for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system in three dimensions. *J. Funct. Anal.*, vol. 111, n° 1, 1993, pp. 239–258.
- [9] Bouchut (F.), Golse (F.) et Pulvirenti (M.). – *Kinetic Equations and Asymptotic Theory*. – Gauthiers-Villars, 2000, *Series in Applied Mathematics*.

- [10] Bouchut (F.) et James (F.). – Duality solutions for pressureless gases, monotone scalar conservation laws, and uniqueness. *Comm. Partial Differential Equations*, vol. 24, 1999, pp. 2173–2189.
- [11] Brenier (Y.). – Convergence of the Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler equations. *Comm. Partial Differential Equations*, vol. 25, 2000, pp. 737–754.
- [12] Brenier (Y.) et Grenier (E.). – Sticky particles and scalar conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 35, n° 6, 1998, pp. 2317–2328 (electronic).
- [13] Burton (J.J.). – *Nucleation Theory*. – Plenum Press, New York, London, 1977, *Statistical Mechanics, Part A : Equilibrium techniques*.
- [14] Caffisch (R.) et Papanicolaou (G.). – Dynamic theory of suspensions with Brownian effects. *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 43, 1983, pp. 885–906.
- [15] Clouet (J.F.) et Domelevo (K.). – Solutions of a kinetic stochastic equation modeling a spray in a turbulent gas flow. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, vol. 7, 1997, pp. 239–263.
- [16] De Angelis (E.) et Jabin (P.E.). – Qualitative analysis of a mean field model of tumor-immune system competition. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, vol. 13, n° 2, 2003, pp. 187–206.
- [17] De Angelis (E.) et Mesin (L.). – On the kinetic (cellular) theory. Conceptual frameworks on modelling the immune response. *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, vol. 11, 2001, pp. 1609–1630.
- [18] DeLellis (C.) et Westdickenberg (M.). – On the Optimality of Velocity Averaging Lemmas. *Ann. IHP Anal. Non Linéaire, à paraître*.
- [19] Desimone (A.), Kohn (R.V.), Müller (S.) et Otto (F.). – Magnetic microstructures, a paradigm of multiscale problems. *In : ICIAM 99 (Edinburgh)*, pp. 175–190. – Oxford, Oxford Univ. Press, 2000.
- [20] Desimone (A.), Kohn (R.V.), Müller (S.) et Otto (F.). – A compactness result in the gradient theory of phase transitions. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, vol. 131, n° 4, 2001, pp. 833–844.
- [21] Dieckmann (O.) et Heesterbeek (J.P.). – *Mathematical Epidemiology of infectious Diseases*. – Wiley, New-York, 2000.
- [22] DiPerna (R.), Lions (P.L.) et Meyer (Y.). – L^p regularity of velocity averages. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, vol. 8, 1991, pp. 271–287.

- [23] Domelevo (K.) et Vignal (M.H.). – Limites visqueuses pour des systèmes de type Fokker-Planck-Burgers unidimensionnels. *C. R. Acad. Sci.*, vol. 332, 2001, pp. 863–868.
- [24] Escobedo (M.), Laurençot (P.) et Mischler (S.). – On a Kinetic Equation for Coalescing Particles. *Preprint*.
- [25] Frid (H.), Jabin (P.E.) et Perthame (B.). – Global Stability of Steady Solutions for a Model in Virus Dynamics. *Math. Model. Numer. Anal.*, à paraître.
- [26] Goodman (J.), Hou (T.Y.) et Lowengrub (J.). – Convergence of the point vortex method for the 2-D Euler equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 43, 1990, pp. 415–430.
- [27] Goudon (T.). – Asymptotic problems for a kinetic model of two-phase flow. *Proc. Royal Soc. Edimburgh.*, vol. 131, 2001, pp. 1371–1384.
- [28] Goudon (T.), Jabin (P.E.) et Vasseur (A.). – Hydrodynamic limits for Vlasov-Stokes equations. Part I : Light particles regime. *Preprint*.
- [29] Goudon (T.), Jabin (P.E.) et Vasseur (A.). – Hydrodynamic limits for Vlasov-Stokes equations. Part II : Fine particles regime. *Preprint*.
- [30] Hamdache (K.). – Global existence and large time behaviour of solutions for the Vlasov-Stokes equations. *Japan J. Industrial and Appl. Math.*, vol. 15, 1998, pp. 51–74.
- [31] Hauray (M.) et Jabin (P.E.). – N-particles approximation of the Vlasov-Poisson equation with singular potentials. *Preprint*.
- [32] Hylkema (J.) et Villedieu (P.). – Modélisation cinétique et simulation numérique des collisions entre gouttelettes d'alumine dans un propulseur à poudre. Partie 1 : aspects théoriques. *Preprint*.
- [33] Jabin (P.E.). – Macroscopic limit of Vlasov type equations with friction. *Ann. IHP Anal. Non Linéaire*, vol. 17, 2000, pp. 651–672.
- [34] Jabin (P.E.). – Various levels of models for aerosols. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, vol. 12, 2002, pp. 903–919.
- [35] Jabin (P.E.) et Niethammer (B.). – On the rate of convergence to equilibrium in the Becker-Dring equations. *J. Differential Equations*, vol. 191, 2003, pp. 518–543.
- [36] Jabin (P.E.) et Otto (F.). – Identification of the dilute regime in particles sedimentation. *Comm. Math. Phys.*, à paraître.

- [37] Jabin (P.E.), Otto (F.) et Perthame (B.). – Line-energy Ginzburg-Landau models : zero-energy states. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, vol. 5, 2002, pp. 187–202.
- [38] Jabin (P.E.) et Perthame (B.). – Compacité par lemmes de moyenne cinétiques pour des énergies de Ginzburg-Landau. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, vol. 331, 2000, pp. 441–445.
- [39] Jabin (P.E.) et Perthame (B.). – Compactness in Ginzburg-Landau energy by kinetic averaging. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 54, 2001, pp. 1096–1109.
- [40] Jabin (P.E.) et Perthame (B.). – Kinetic methods for line-energy Ginzburg-Landau models. *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 2001–2002, Exposé XIII, École Polytech., Palaiseau, 2002.*
- [41] Jabin (P.E.) et Perthame (B.). – Regularity in kinetic formulations via averaging lemmas. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, vol. 8, 2002, pp. 761–774.
- [42] Jabin (P.E.) et Soler (J.). – A kinetic description of particle fragmentations. *Preprint.*
- [43] Jabin (P.E.) et Vega (L.). – Lemmes de moyenne et transformée aux rayons X. *Soumis à C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*
- [44] Jabin (P.E.) et Vega (L.). – A real space method for averaging lemmas. *Preprint.*
- [45] Jin (W.) et Kohn (R. V.). – Singular perturbation and the energy of folds. *J. Nonlinear Sci*, vol. 10, 2000, pp. 355–390.
- [46] Kružkov (S. N.). – Generalized solutions of the Cauchy problem in the large for first order nonlinear equations. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, vol. 187, 1969, pp. 29–32.
- [47] Kružkov (S. N.). – First order quasilinear equations with several independent variables. *Mat. Sb. (N.S.)*, vol. 81 (123), 1970, pp. 228–255.
- [48] Laurençot (P.) et Mischler (S.). – The continuous coagulation, fragmentation equations with diffusion. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. 162, 2002, pp. 45–99.
- [49] Laurençot (P.) et Mischler (S.). – From the Becker–Döring to the Lifshitz–Slyozov–Wagner equations. *J. Stat. Phys.*, vol. 106, 5-6, 2002, pp. 957–991.

- [50] Ledoux (Michel). – Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities. *In : Azéma, Jacques (ed.) et al., Séminaire de probabilités XXXIII. Berlin : Springer. Lect. Notes Math. 1709, 120-216.* – Springer.
- [51] Lions (P.L.), Perthame (B.) et Tadmor (E.). – A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related questions. *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 7, 1994, pp. 169–191.
- [52] Novak (M.A.) et May (R.M.). – *Virus dynamics (mathematical principles of immunology and virology)*. – Oxford University Press, 2000.
- [53] Oleïnik (O.A.). – On Cauchy’s problem for nonlinear equations in a class of discontinuous functions. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, vol. 95, 1954, pp. 451–454.
- [54] Penrose (O.). – Metastable States for the Becker–Döring Cluster Equations. *Comm. Math. Phys.*, vol. 124, 1989, pp. 515–541.
- [55] Penrose (O.) et Lebowitz (J.L.). – *Towards a rigorous theory of metastability*. – North–Holland, Amsterdam, 1979, *Studies in statistical mechanics, Vol. VII. Fluctuation phenomena*.
- [56] Perthame (B.). – Uniqueness and error estimates in first order quasilinear conservation laws via the kinetic entropy defect measure. *J. Math. Pures Appl.*, vol. 77, 1998, pp. 1055–1064.
- [57] Perthame (B.). – *Kinetic Formulation of Conservation Laws*. – Oxford University Press, 2003, *Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications*.
- [58] Perthame (B.) et Souganidis (P.E.). – A limiting case for velocity averaging. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, vol. 31, 1998, pp. 591–598.
- [59] Pulvirenti (M.) et Simeoni (C.). – L^∞ -estimates for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck equation. *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 23, n° 10, 2000, pp. 923–935.
- [60] Rivière (T.) et Serfaty (S.). – Compactness, kinetic formulation, and entropies for a problem related to micromagnetics. *Comm. in PDE, à paraître*.
- [61] Rivière (T.) et Serfaty (S.). – Limiting domain wall energy for a problem related to micromagnetics. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 54, 2001, pp. 294–338.
- [62] Spohn (H.). – *Large scale dynamics of interacting particles*. – Berlin New York NY Paris : Springer, 1991.

- [63] Stam (A.). – Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon. *Inform. Control*, vol. 2, 1959, pp. 101–112.
- [64] Taulbee (D.B.) et Yu (C.P.). – A theory of aerosol deposition in the human respiratory tract. *J. Appl. Physiol.*, vol. 38, 1975, pp. 77–85.
- [65] Villani (C.). – A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. *In : Handbook of mathematical fluid dynamics, Vol. I*, pp. 71–305. – Amsterdam, North-Holland, 2002.
- [66] Westinckenberg (M.). – Some new velocity averaging results. *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 33, 2002, pp. 1007–1032.