

Compacité par lemmes de moyenne cinétiques pour des énergies de Ginzburg-Landau

Compactness in Ginzburg-Landau energy by kinetic averaging

Pierre-Emmanuel Jabin,

email : jabin@dma.ens.fr

Benoît Perthame

email : benoit.perthame@ens.fr

Département de Mathématiques et Applications, École Normale Supérieure
45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France

Résumé Nous considérons une énergie de Ginzburg-Landau pour des champs de vecteurs à divergence nulle en dimension deux. Cette énergie apparaît notamment dans la théorie des transitions de phase. Nous prouvons que, lorsque le paramètre de relaxation tend vers zéro, toute suite d'énergie finie est compacte et nous donnons quelques informations sur la limite. La preuve utilise une formulation cinétique des entropies introduites par Desimone, Kohn, Müller et Otto.

Abstract We consider a Ginzburg-Landau energy for two dimensional divergence free fields appearing in the gradient theory of phase transition for instance. We prove that, as the relaxation parameter vanishes, families of such fields with finite energy are compact in $L^p(\Omega)$ and we give some information on the limit. Our proof is based on a kinetic interpretation of the entropies which were introduced by Desimone, Kohn, Müller and Otto.

Abridged english version

This paper is concerned with the compactness, as the parameter ε vanishes, for divergence free functions in \mathbb{R}^2 with a finite Ginzburg-Landau energy. Namely, we consider functions $u_\varepsilon : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (Ω a smooth bounded domain of \mathbb{R}^2) such that

$$\begin{cases} \operatorname{div} u_\varepsilon = 0 & (\text{i.e. } u_\varepsilon \text{ is a curl}), \\ \varepsilon \int_\Omega |Du_\varepsilon|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |1 - |u_\varepsilon|^{2\alpha}|^p dx \leq E_0. \end{cases}$$

This problem, and variants, arises in many physical applications such as thin films or in the gradient theory of phase transition (see A. Desimone *et al* [5] and the references therein).

Throughout this note, we use the notation $\chi(\xi, u) = \mathbb{1}_{\{|\xi \cdot u| > 0\}}$. We prove the

Theorem *Assume that $2\alpha p > 1$ and $0 < p \leq 2$. Then the sequence u_ε is relatively compact in $L^q(\Omega)$ for $1 \leq q < 2\alpha p$. After extraction of a subsequence, the limit u is a divergence free field and it satisfies $|u| = 1$ and*

$$\xi \cdot \nabla_x \chi(\xi, u) = \sum \left(\frac{1}{\beta} \partial_{\xi_i} (|\xi|^2 \partial_{\xi_j} (m_{ikj}^\beta \xi_k)) - \frac{3 + \beta}{\beta} \xi_j \partial_{\xi_i} (m_{jki}^\beta \xi_k) \right),$$

where the sum is taken for i, j, k equal to 1, 2 and β is any real number with $0 < \beta \leq 1$, $\beta < 2\alpha p - 1$, $\beta \leq \alpha p$, and the $m_{ijk}^\beta(\xi, x)$ are measures such that

$$\int_\Omega \sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} |m_{ijk}^\beta(\xi, x)| dx \leq E_0, \quad \sum_i m_{ijj}^\beta = 0, \quad \sum_k \xi_k \nabla_\xi m_{ijk}^\beta = 0,$$

$$\int_{\Omega \times B(R)} |\nabla_\xi m_{ijk}^\beta(\xi, x)| dx d\xi \leq C(R) E_0, \quad \text{for all } R > 0.$$

Some regularity for the limiting function u as well as cancellation properties of the kinetic defect measures m_{ijk}^β are also available, especially the strange phenomenon of the parametrisation by β can be relaxed in some cases.

Proposition *Additionally, we have for any open subset \mathcal{O} of Ω and any $r > 1$*

- 1) $u \in W^{s,p}$ for all $0 \leq s < \frac{1}{5}$, $p < \frac{5}{3}$.
- 2) If ∇u_ε is uniformly bounded in $L^r(\mathcal{O})$, then $m_{ijk}^\beta = 0$ on \mathcal{O} .
- 3) If $\nabla_x |u_\varepsilon|$ is uniformly bounded in $L^r(\mathcal{O})$, then $\sum_j m_{ijj}^\beta = 0$.

4) If $|u_\varepsilon| \rightarrow 1$ in $L^\infty(\mathcal{O})$, then $\frac{1}{\beta}m_{ijk}^\beta = m_{ijk}$ does not depend on β , $\sum_j m_{ijj}^\beta = 0$ and

$$\xi \cdot \nabla_x \chi(\xi, u) = \sum_{i,j,k} |\xi|^2 \xi_k \partial_{\xi_i} \partial_{\xi_j} m_{ikj} \text{ on } \mathcal{O}.$$

This theorem is motivated by the compactness result proved in [4] by A. Desimone, R.W. Kohn, S. Müller and F. Otto for a similar functional. Our method of proof is also motivated by that of [4], and by the remarkable analogy between the Ginzburg-Landau model (1.1) and scalar conservation laws through a family of entropies as noted in that paper. Here, we introduce the additional idea of using the kinetic formulation of Lions, Perthame and Tadmor [9] and [10] which allows simpler and stronger compactness arguments through kinetic averaging lemmas just as it does it for nonlinear hyperbolic systems. Several recent results address the questions of compactness and of characterizing the limiting energy, see for example [1], [2], [8] and [13]. Also the constraint $\operatorname{div} u = 0$ makes the problem (and the possible singularities) very different from those in the Ginzburg-Landau model studied in Béthuel, Brézis and Hélein [3].

1 Introduction

Les détails de la preuve sont donnés dans Jabin, Perthame [7]. Cet article s'intéresse à la compacité, lorsque le paramètre ε tend vers zéro, de fonctions à divergence nulle dans \mathbb{R}^2 avec une énergie de Ginzburg-Landau finie. Plus précisément, nous considérons des fonctions $u_\varepsilon : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (Ω étant un domaine régulier de \mathbb{R}^2) tels que

$$\begin{cases} \operatorname{div} u_\varepsilon = 0 \text{ (i.e. } u_\varepsilon \text{ is a curl),} \\ \varepsilon \int_\Omega |Du_\varepsilon|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |1 - |u_\varepsilon|^{2\alpha}|^p dx \leq E_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Cette question et des variantes apparaissent dans différentes situation comme le films magnetiques fins ou la théorie des transitions de phase (on pourra se reporter à A. Desimone *et al* [5] pour plus de précisions).

Dans la suite, on notera

$$\chi(\xi, u) = \mathbb{1}_{\xi \cdot u > 0}. \quad (1.2)$$

Le principal résultat est le

Théorème 1.1 *On suppose que $2\alpha p > 1$ et que $0 < p \leq 2$. Alors la suite u_ε est relativement compacte dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q \leq 2\alpha p$. Après extraction d'une sous-suite, la limite u est un champ à divergence nulle qui vérifie $|u| = 1$ et*

$$\xi \cdot \nabla_x \chi(\xi, u) = \sum \left(\frac{1}{\beta} \partial_{\xi_i} (|\xi|^2 \partial_{\xi_j} (m_{ikj}^\beta \xi_k)) - \frac{3+\beta}{\beta} \xi_j \partial_{\xi_i} (m_{jki}^\beta \xi_k) \right), \quad (1.3)$$

la somme étant prise pour i, j, k égaux à 1 ou 2, β est un réel quelconque tel que $0 < \beta \leq 1$, $\beta < 2\alpha p - 1$, $\beta \leq \alpha p$, et les m_{ijk}^β sont des mesures telles que

$$\int_{\Omega} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} |m_{ijk}^\beta(\xi, x)| dx \leq E_0, \quad \sum_i m_{iij}^\beta = 0, \quad \sum_k \xi_k \nabla_\xi m_{ijk}^\beta = 0, \quad (1.4)$$

$$\int_{\Omega \times B(R)} |\nabla_\xi m_{ijk}^\beta(\xi, x)| dx d\xi \leq C(R) E_0, \quad \text{for all } R > 0. \quad (1.5)$$

Il est possible de préciser quelque peu la régularité de la fonction limite ainsi que des annulations des mesures défaut m_{ijk}^β . En particulier, on peut dans certains cas éliminer la dépendance en β .

Proposition 1.1 *On a également pour tout ouvert \mathcal{O} de Ω et tout réel $r > 1$*

- 1) $u \in W^{s,q}$ pour tout $0 \leq s < \frac{1}{5}$, $q < \frac{5}{3}$.
- 2) Si $\nabla_x u_\varepsilon$ est uniformément borné dans $L^r(\mathcal{O})$, alors $m_{ijk}^\beta = 0$ dans \mathcal{O} .
- 3) Si $\nabla_x |u_\varepsilon|$ est uniformément borné dans $L^r(\mathcal{O})$, alors $\sum_j m_{ijj}^\beta = 0$.
- 4) Si $|u_\varepsilon| \rightarrow 1$ dans $L^\infty(\mathcal{O})$, alors $\frac{1}{\beta} m_{ijk}^\beta = m_{ijk}$ ne dépend pas de β , $\sum_j m_{ijj}^\beta = 0$ et

$$\xi \cdot \nabla_x \chi(\xi, u) = \sum_{i,j,k} |\xi|^2 \xi_k \partial_{\xi_i} \partial_{\xi_j} m_{ikj} \text{ dans } \mathcal{O}. \quad (1.6)$$

Ce théorème a pour motivation le résultat de compacité démontré par A. Desimone, R.W. Kohn, S. Müller et F. Otto dans [4]. Notre démonstration s'inspire également de celle de [4], notamment de l'analogie remarquable entre le modèle de Ginzburg-Landau (1.1) et les lois de conservation scalaires à l'aide d'une famille d'entropies. Nous introduisons en plus l'idée d'utiliser une formulation cinétique qui nous donne un argument de compacité plus

simple et plus fort grâce à des lemmes de moyenne, comme c'est le cas pour les systèmes hyperboliques non-linéaires. Une condition supplémentaire de signe sur les m_{ijk}^β donnerait peut-être de l'unicité pour u comme dans [11].

Cette méthode permet de traiter des exposants α et q plus généraux et d'obtenir des informations sur la limite u . On peut ainsi déduire une régularité de Sobolev de l'équation satisfaite par $\chi(\xi, u(x))$ (premier point de la proposition 1.1), en appliquant un lemme de moyenne prouvé dans [6].

La limite vérifie également $\operatorname{div} u = 0$ et $|u| = 1$. En dimension deux, on pose $u = \nabla^T \psi(x)$, et ψ doit vérifier $|\nabla_x \psi| = 1$. À l'exception possible du cas d'un domaine convexe, u n'est pas la solution de viscosité de cette équation Eikonal (voir le contre-exemple de Jin et Kohn dans [8]). La limite est peut-être mieux décrite en utilisant les énergies étudiées par P. Aviles et Y. Giga dans [2].

Des résultats semblables peuvent être obtenus pour des variantes de l'énergie (1.1) tel le cas étudié dans [13] où l'on relâche la contrainte de divergence nulle mais on impose $|u_\varepsilon| = 1$. Il semblerait que l'on trouve alors la solution de viscosité. Nous soulignons enfin qu'une autre méthode de compacité pour l'énergie (1.1) a été développée dans [1]. Notons aussi que la contrainte $\operatorname{div} u = 0$ fait que la limite est très différente des vortex trouvés dans Béthuel, Brézis et Hélein [3].

2 Méthode de démonstration

La preuve repose sur le lemme suivant qui est une version cinétique des équations d'entropies introduites dans [4].

Lemme 2.1 *Pour toute fonction régulière u définie sur Ω , on a au sens des distributions en ξ*

$$|u|\xi \cdot \nabla_x \chi(\xi, u) + |\xi|^2 \nabla_x |u| \cdot \nabla_\xi \chi = |\xi|^2 \frac{u}{|u|} \cdot \nabla_\xi \chi \operatorname{div} u. \quad (2.1)$$

Ce lemme permet d'écrire une équation cinétique pour les champs à divergence nulle, c'est-à-dire

Lemme 2.2 *Pour tout $\beta > 0$, $u \in H^1(\Omega)$ with $\operatorname{div} u = 0$, on a p.p. en x ,*

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_\xi^2)$

$$\begin{aligned}
\xi \cdot \nabla_x (|u|^{1+\beta} \chi) &= \frac{1}{\beta} \operatorname{div}_x \left\{ -\nabla_\xi [|\xi|^2 |u| \chi (|u|^\beta - 1)] \right. \\
&\quad \left. + (3 + \beta) [\chi |u| \xi (|u|^\beta - 1)] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\beta} \nabla_\xi \otimes \nabla_\xi : [|\xi|^2 \chi (|u|^\beta - 1) \frac{u}{|u|} \otimes \nabla_x (u \cdot \xi)] \\
&\quad - \frac{3+\beta}{\beta} \operatorname{div}_\xi \left[\chi \frac{u}{|u|} (|u|^\beta - 1) \xi \cdot \nabla u \cdot \xi \right] \\
&\quad - \frac{2}{\beta} \operatorname{div}_\xi \left[\chi (|u|^\beta - 1) (\xi \cdot \frac{u}{|u|}) \nabla_x (u \cdot \xi) \right] \\
&\quad + \frac{3+\beta}{\beta} \chi (|u|^\beta - 1) \frac{u}{|u|} \cdot \nabla_x (u \cdot \xi).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

D'autre part, on déduit de (1.1) les estimations

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|(1 - |u_\varepsilon|^{2\alpha})^{p/2}\|_{L^2(\Omega)} &\leq E_0/2, \\
|u_\varepsilon| &\longrightarrow 1 \text{ dans } L^q(\Omega), \quad 1 \leq q \leq 2\alpha p.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Ces estimations impliquent que si $\beta < 2\alpha p - 1$ et $\beta \leq \alpha p$, alors

$$|u_\varepsilon| (|u_\varepsilon|^\beta - 1) \longrightarrow 0 \text{ dans } L^r(\Omega), \quad r > 1, \tag{2.4}$$

$$\|(|u_\varepsilon|^\beta - 1) \nabla_x u_\varepsilon\|_{L^1} \leq E_0. \tag{2.5}$$

À l'aide des lemmes de moyenne pour un second membre avec une dérivée totale en x (voir notamment [12]), on déduit de l'équation (2.2) et des estimations (2.4) et (2.5) que toute famille de moments $\int \psi(\xi) |u_\varepsilon|^{1+\beta} \chi(u_\varepsilon, \xi) d\xi$ est compacte dans $L^r(\Omega)$ pour tout $1 \leq r < 2\alpha p/(1+\beta)$, pour toute fonction ψ régulière et à support compacte.

Prenant comme ψ un champ de vecteurs colinéaire à ξ , il est ensuite aisé d'obtenir la compacité de la famille u_ε .

On peut alors passer à la limite dans l'équation (2.2), en posant

$$m_{ijk}^\beta = w\text{-}\lim \chi(\xi, u_\varepsilon(x)) (|u_\varepsilon|^\beta - 1) \frac{u_{\varepsilon k}}{|u_\varepsilon|} \partial_i u_{\varepsilon j}. \tag{2.6}$$

L'inégalité (2.5) permet de montrer les bornes sur m_{ijk}^β énoncées dans le théorème et la proposition, ainsi que les propriétés d'annulation du théorème. Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient finalement l'équation (1.3) du théorème 1.1. De cette équation et en utilisant les lemmes de régularité en moyenne de DiPerna, Lions et Meyer [6], on déduit la régularité Sobolev (point 1) de la proposition). Ceci suit la preuve des effets régularisants pour les lois de conservation

scalaires non dégénérées [9] (ou pour la dynamique des gaz isentropiques avec $\gamma = 3$, [10]). Enfin, les propriétés d’annulation énoncées dans la proposition reposent sur des estimations plus fines sur la mesure m_{ijk}^β lorsque des informations plus précises sont connues. Elles semblent indiquer l’existence de deux niveaux de singularité dans ce problème ($m_{ijk}^\beta = 0$ et m_{ijk}^β indépendante de β).

ACKNOWLEDGEMENT

We acknowledge support from the european TMR network Asymptotic methods in kinetic theory ERB FMRX CT97 0157.

Références

- [1] L. Ambrosio, C. De Lellis et C. Mantegazza, Line energies for gradient vector fields in the plane. *Calc. Var. PDE* **9** (1999) 327–355.
- [2] P. Aviles et Y. Giga, On lower semicontinuity of a defect energy obtained by a singular limit of the Ginzburg-Landau type energy for gradient fields. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **129A** (1999) 1–17.
- [3] F. Béthuel, H. Brézis et F. Hélein, Ginzburg-Landau vortices. *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, Birkhauser (1994).
- [4] A. Desimone, R.W. Kohn, S. Müller et F. Otto, A compactness result in the gradient theory of phase transitions. À paraître dans *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*.
- [5] A. Desimone, R.W. Kohn, S. Müller et F. Otto, Magnetic microstructures, a paradigm of multiscale problems. À paraître dans *Proceedings of ICIAM*, (1999). (1999).
- [6] R.J. DiPerna, P.L. Lions et Y. Meyer, L^p regularity of velocity averages, *Ann. I.H.P. Anal. Nonlinear* **8**(3–4) (1991) 271–287.
- [7] P.E. Jabin et B. Perthame, article en préparation.
- [8] W. Jin et R. V. Kohn, Singular perturbation and the energy of folds. À paraître dans *J. Nonlinear Sci.*
- [9] P.L. Lions, B. Perthame et E. Tadmor, A kinetic formulation of multi-dimensional scalar conservation laws and related equations. *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), 169–191.

- [10] P.L. Lions, B. Perthame et E. Tadmor, Existence of entropy solutions to isentropic gas dynamics system in Eulerian and Lagrangian variables. *Comm. Math. Phys.* **163** (1994), 415–431.
- [11] B. Perthame, Uniqueness and error estimates in first order quasilinear conservation laws via the kinetic entropy defect measure. *J. Math. P. et Appl.* **77** (1998), 1055–1064.
- [12] B. Perthame et P.E. Souganidis, *A limiting case for Velocity averaging.* Ann. Sci. École Norm. Sup., 31, pp 591–598, 1998.
- [13] T. Rivière et S. Serfaty, Limiting domain wall energy in micromagnetism. Preprint (2000).