Partiel de géométrie différentielle, durée 2h

L'usage de la calculatrice est interdit.
Les exercices sont indépendants. Il n'est pas nécessaire de faire tous les exercices pour avoir la note maximale...

Exercice 1 On considère l'arc paramétrée définie par

$$x(t) = \ln\Big(\frac{t^4}{(t-2)^2}\Big), y(t) = \frac{1}{5}t^2(t-6).$$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de l'arc paramétrée. Calculer x' et y' sur $\mathcal{D}$.
b) Etablir que $x(t) \sim \ln(t^2)$ lorsque $t \to \pm\infty$. En déduire les limites de x en $+\infty$ et en $-\infty$.
c) Donner les limites de x et y aux bornes de $\mathcal{D}$ et dresser le tableau des variations de x et y.

2) a) Déterminer la nature des branches infinies $t \to \pm\infty$, $t \to 0^{\pm}$ et $t \to 2^{\pm}$. S'il existe une branche parabolique, on précisera sa direction, si la courbe a une asymptote, on donnera l'équation de l'asymptote ainsi que la position relative de la courbe par rapport à celle-ci.
b) Soit Γ le graphe de la fonction $f(x) = -\frac{12}{5}\exp(\frac{x}{2})$. Déterminer un équivalent simple de $y(t) - f(x(t))$ lorsque $t \to 0$ ($t \neq 0$). En déduire la position relative de la courbe par rapport à Γ lorsque $t \to 0$. Quel nom pourrait-on donner au point de paramètre $t = 0$?

3) a) Montrer que $t = 4$ est l'unique point singulier de la courbe. On pose $t = 4 + h$, avec $h \to 0$.
b) Effectuer un développement limité des fonctions $\boldsymbol{x'}$ et $\boldsymbol{y'}$ en fonction de h lorsque $h \to 0$. En déduire un développement limité des fonctions x et y en fonction de h lorsque $h \to 0$. Déterminer la nature du point singulier ainsi que sa tangente ou demi-tangente.
c) Montrer que la courbe admet un unique point d'inflexion, pour une valeur t_0 de t que l'on précisera. Quelle est la pente de la tangente en ce point ?

4) Tracer la courbe. On commencera par placer la partie de la courbe Γ correspondant à $x \leq 0$. On admettra que $x(t_0) \simeq 1.39$ et $y(t_0) \simeq -1.66$ (à 10^{-2} près), où t_0 est défini en **3) c)**.

Exercice 2 On veut étudier la courbe en coordonnées polaires donnée par

$$r = r(\theta) = \theta^{1/2} - 2\theta^{5/4} + \theta^2.$$

On rappelle que les coordonnées cartésiennes d'un point de la courbe sont alors données par

$$x(\theta) = r(\theta) \times \cos\theta, \quad y(\theta) = r(\theta) \times \sin\theta.$$

1) Étudier la fonction $r(\theta)$.
2) Calculer le vecteur dérivé $\gamma'(\theta)$ en fonction de $r(\theta)$ et $r'(\theta)$. Vérifier qu'il ne s'annule en θ_0 que si $r(\theta_0) = 0$ et $r'(\theta_0) = 0$.
3) En déduire que la courbe a seulement un point singulier en $\theta = 1$ et étudier ce point singulier.
4) Tracer la courbe.
5) Montrer que la longueur de la courbe entre 0 et 1 est finie.
6) Donner un équivalent de l'abscisse curviligne $s(\theta)$ en prenant $\theta = 0$ comme origine, au voisinage de $\theta = 0$.

Exercice 3 On étudie la suite de courbes $\gamma_n(t)$ définies par $\gamma_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$ avec $x_n(t) = n^{-1}(1-\cos(nt))$, $y_n(t) = n^{-1}\sin(nt))$ sur $[0,\ \pi/n]$ et $\gamma_n(t+k\pi/n) = (2k/n, 0) + \gamma_n(t)$.
1) Etudier et tracer γ_n sur $[0, \pi/n]$ puis par translation sur $[0,\ 2\pi]$.
2) Calculer la longueur $l(\gamma_n)$ de γ_n sur $[0,\ 2\pi]$.
3) Prouver que x_n et y_n convergent uniformément vers $x(t)$, $y(t)$, que l'on explicitera, sur $t \in [0,\ 2\pi]$. Montrer que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ est un arc paramétré C^1.
4) Vérifier que $l(\gamma) < \liminf l(\gamma_n)$ et donc que la longueur n'est pas continue par rapport à la norme uniforme.
5) On étudie le cas général. Soit donc $\gamma_n(t) \ : [0,\ 1] \to \mathbb{R}^2$ une suite quelconque de courbes C^1. On suppose que $\gamma_n(t)$ converge en norme uniforme vers un arc paramétré $\gamma(t)$ sur $[0,\ 1]$, c'est-à-dire $\sup_t |\gamma_n(t) - \gamma(t)| \to 0$. Prouver que $l(\gamma) \leq \liminf_n l(\gamma_n)$.

Exercice 4 On s'intéresse à la courbe définie en dimension 3 sur $t \in [-\pi/8,\ \pi/8]$ par

$$x(t) = \cos t \cos(t^2), \quad y(t) = \sin t \cos(t^2), \quad z(t) = \sin(t^2).$$

1) Faire le tableau des variations pour x, y et z. Pour $y(t)$ on pensera à utiliser le fait que $|\sin t| \leq \cos t$ et $|\sin t^2| \leq \cos t^2$ sur l'intervalle d'étude.
2) Montrer que la courbe est tracée sur la sphère.
3) Dessiner la courbe.

Exercice 5 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes
1) $y' - y = 0$ avec $y(0) = 1$.
2) $y' - y = x$ avec $y(0) = 1$.
3) $y' = y\cos x$ avec $y(1) = 2$.
4) $y' = y\cos x + \cos x$ avec $y(0) = 1$.
5) $y' = (e^{x^2} + x^3)\, y$ avec $y(0) = 0$.