Partiel d'analyse numérique

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit. La durée de l'examen est de 2h. Les questions marquées d'une étoile sont plus difficiles.

Exercice 1
1) Rappeler comment calculer la solution de $A\,x = y$ par la méthode itérée de Gauss-Seidel.
2) On considère les matrices

$$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix} \qquad D = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}.$$

Et pour tout vecteur y on définit la suite de vecteur x_k par récurrence avec $x_{k+1} = D^{-1}\,y + D^{-1}\,(D - A)\,x_k$.
Indiquer, en le justifiant, si la suite converge ou non.

Exercice 2 On définit la matrice

$$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{matrix}.$$

1) On pose $y = (0 \ \ -2 \ \ -5)$. Résoudre le système $A\,x = y$ par la méthode du pivot de Gauss.
2) Indiquer si A peut se décomposer sous forme $L\,U$ et si c'est le cas, donner la décomposition.

Exercice 3 On considère une suite de vecteurs définis par récurrence

$$x_{k+1} = B\,x_k + z, \quad x_0 = 0.$$

1) On suppose dans cette question que la suite converge en un nombre fini d'itérations, c'est-à-dire qu'il existe l tel que $x_l = B\,x_l + z$.
a) Si $l = 1$ montrer que cela implique que $z \in \operatorname{Ker} B$.
b) Prouver par récurrence que $x_{k+1} = \sum_{m=0}^{k} B^m\,z$, avec la convention $B^0\,z = z$.
c) En déduire que si $l \geq 1$ alors $z \in \operatorname{Ker} B^l$.
2) Prouver que si la suite converge en un nombre fini d'itérations quel que soit z alors la matrice B est nilpotente.
3)* Prouver que si la suite converge plus vite qu'exponentiellement, c'est-à-dire que pour tout r et k, il existe $m > k$ tq $\|x_m - x\| < r^m$ alors la suite converge en un nombre fini d'itérations.

Exercice 4 On désire appliquer la méthode du pivot à une matrice A tridiagonale soit

$$A = \begin{array}{ccccccc} a_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & & \dots & 0 & b_{n-1} & a_n & c_{n-1} \end{array},$$

ou $A_{ij} = a_i$ si $i = j$, $A_{ij} = b_j$ si $i = j + 1$, $A_{ij} = c_i$ si $j = i + 1$ et $A_{ij} = 0$ sinon.
1) Calculer le coût de la méthode sur une matrice de ce type.
2)* Prouver par récurrence qu'après l'étape k de la méthode du pivot (élimination sur les k premières colonnes) on obtient la matrice

$$\begin{aligned} A^k_{ij} &= A_{ij} \quad \text{si } i \geq k+2 \quad \text{ou si } j > i, \\ A^k_{ij} &= d_i \quad \text{si } i = j \text{ et } i \leq k+1, \\ A^k_{ij} &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

où la suite d_i est définie par $d_1 = a_1$ et $d_{i+1} = a_{i+1} - c_i * b_i / d_i$.
3) On suppose que $a_1 = 1$, $a_i = 2$ pour $i > 1$, et $b_j = \lambda$ et $c_j = \lambda^{-1}$ pour tout $j \leq n-1$, λ étant un réel non nul donné. Montrer que A est décomposable sous forme LU et donner son déterminant.