Séance 7 de compléments d'Analyse Numérique

1) Écrire une fonction $y = rectangle(xi, fi, n)$ où xi est un vecteur de taille n contenant des points $xi(i)$ de $\mathbb{R}$, fi est un vecteur de taille $n-1$ tel que le point $fi(i)$ est supposé contenir la valeur d'une fonction f au point $xi(i)$ pour $i < n$. La fonction renvoie la valeur de l'intégrale de f par la méthode des rectangles, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(x(i))\,(x(i+1) - x(i)).$$

2) Prendre $f(x) = \cos x$, $xi(i) = i/n$ et comparer le résultat de la méthode avec la vraie valeur pour $n = 10$, $n = 100$ et $n = 1000$.
3) Programmer une fonction $e = erreurrect(N, d)$. Cette fonction doit renvoyer un vecteur e de taille N tel que $e(k)$ est égale à l'erreur entre le calcul de la méthode des rectangles et la vraie valeur, toujours pour la fonction $f(x) = \cos x$, $xi(i) = i/n$ et pour n=k/N.
4) Tracer la courbe d'erreur correspondante.
5) Reprendre les 4 étapes précédentes pour la méthode des trapèzes donnée par

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{f(x(i)) + f(x(i+1))}{2}\,(x(i+1) - x(i)).$$

6) Reprendre encore les 4 premières étapes pour la méthode de Simpson

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{f(x(i)) + f(x(i+1)) + 4f((x(i) + x(i+1))/2)}{6}\,(x(i+1) - x(i)).$$