Séance 8 de compléments d'Analyse Numérique

1) Écrire une fonction $y = f(x)$ renvoyant dans $y \in \mathbb{R}$ la valeur $-x$.
2) On définit une suite de réels par récurrence avec la relation

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\delta t} = f(u_n).$$

Écrire une fonction $u = eulern(n, \delta t, u0)$ renvoyant dans u la valeur du $n$ième terme de la suite u_n avec $u_0 = u0$.
3) Modifier la fonction précédente en $U = eulervect(n, \delta t, u0)$ qui renvoit dans U le vecteur $(u_0, \ldots, u_n)$ où u_k est encore le $k$ième terme de la suite.
4) On s'attend à ce que u_n soit une bonne approximation de $x(n\,\delta t)$ où $x(t)$ est la fonction solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Vérifiez-le (par exemple en traçant les courbes) pour $f(x) = -x$ puis $f(x) = x(1-x)$ avec $\delta t = .1$, $\delta t = .01$ et $\delta t = .001$.
5) Reprendre les questions précédentes avec la méthode d'Euler implicite donnée par

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\delta t} = f(u_{n+1}).$$

On prendra $f = -x$ ou $f = x(1-x)$ et l'on comparera avec la méthode précédente.
6) On désire résoudre par la méthode d'Euler implicite l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = A\,X,$$

où A est une matrice sur $\mathbb{R}^k$ et $X(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^k$. Utiliser soit une méthode du pivot soit une méthode de Gauss-Seidel pour mettre en place l'algorithme. Puis comparer les deux possibilités pour une matrice A ayant 2 sur la diagonale et -1 sur la sous et la sur diagonale, en faisant varier la taille k et la précision δt.