

TD n°1 de géométrie différentielle

**Exercice 1**

1) Étudier les arcs paramétrés suivants pour  $a, b > 0$

$$\begin{aligned}x(t) &= a \cos t, & y(t) &= b \sin t, \\x(t) &= a \frac{1-t^2}{1+t^2}, & y(t) &= b \frac{2t}{1+t^2}.\end{aligned}$$

2) Vérifier qu'ils définissent la même courbe. Quelle est-elle ?

**Exercice 2** Soit la courbe définie par l'équation

$$a x^2 + 2b x y + c y^2 + d x + e y + f = 0.$$

1) Étudier la forme quadratique  $q(x, y) = a x^2 + 2b x y + c y^2$  et en déduire le type de la courbe ainsi que la direction des axes ou asymptotes éventuelles.

2) Retrouver les formules pour le centre, l'excentricité...

**Exercice 3** Trouver tous les points doubles de la courbe définie par  $x(t) = \sin 2t$  et  $y(t) = \sin 3t$ .

**Exercice 4** Étudier la courbe définie par

$$x(t) = r(t) \cos t, \quad y(t) = r(t) \sin t,$$

où  $r$  est une fonction décroissante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+$  valant  $+\infty$  en  $-\infty$  et 0 en  $+\infty$ . Dans quel cas la longueur de cette courbe sur  $t \in \mathbb{R}_+$  est-elle finie ?

**Exercice 5** Soit la courbe donnée dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  par

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

1) Chercher un paramétrage de cette courbe.

2) Faire l'étude à l'aide du paramétrage trouvé.