TD n°2 de géométrie différentielle

Exercice 1 Etude d'un point double.
On considère l'arc paramétré donné par $x(t) = t^3 - 4t$ et $y(t) = t^2 - t$ pour $t \in \mathbb{R}$.
1) Montrer qu'il existe un unique point double pour cet arc, de paramètres $t_1 < t_2$ vérifiant $t_1 + t_2 = 1$ et $t_1 t_2 = -3$. Déterminer alors t_1 et t_2.
2) En déduire les coordonnées du point double, ainsi que les directions des tangentes en ce point ; vérifier que celles-ci sont orthogonales.

Exercice 2 Soit l'arc paramétré défini par

$$x(t) = \frac{t^2 - 1}{t} \qquad y(t) = \frac{t + 1}{t(t-1)}.$$

1) Etudier les variations de x et y. Existe-t-il des valeurs de t pour lesquelles $x'(t) = y'(t) = 0$?
2) Etudier les asymptotes à la courbe, puis tracer la courbe.

Exercice 3 Soit l'arc paramétré défini par

$$x(t) = \frac{t^2}{t - 1} \qquad y(t) = \frac{t}{t^2 - 1}.$$

Etudier les variations de x et y. Etudier les asymptotes à la courbe, puis la tracer.

Exercice 4 On se donne l'arc paramétré défini par

$$x(t) = \frac{e^{-t}}{t} \qquad y(t) = \frac{1}{t(t-1)}.$$

1) Etudier les variations de x et y. Préciser les points où la tangente est parallèle aux axes.
2) Préciser les asymptotes à la courbe représentative, ainsi que la position relative de la courbe et de l'asymptote.
3) Déterminer la limite de $\frac{y(t)}{x(t)}$ lorsque $t \to +\infty$: quelle est la (demi-)tangente à la courbe au point $(0, 0)$?
4) Tracer la courbe.

Exercice 5 On considère l'arc paramétré

$$x(t) = \cos(2t) + 2\cos(t) \qquad y(t) = \sin(2t).$$

1) Etudier les variations de x et y et préciser les points où la tangente est parallèle aux axes.
2) Démontrer que $x(t) + 1 + iy(t) = 4\cos(t)\cos(\frac{t}{2})e^{i\frac{t}{2}}$. En déduire que la courbe admet un point triple, et déterminer les tangentes à ce point triple.
3) Dessiner la courbe.