TD n°3 de géométrie différentielle

Exercice 1 On considère l'arc paramétré donné par

$$x(t) = \frac{t^2}{t-1} \qquad \text{et} \qquad y(t) = t^3 \qquad \text{pour} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1) Etudier les variations de x et y. Etudier les asymptotes/branches infinies à la courbe.
2) Effectuer l'étude près du point singulier, préciser sa nature ainsi que la tangente ou demi-tangente en ce point.
3) Montrer que la courbe présente deux points d'inflexion. Tracer finalement la courbe.

Exercice 2 Soit l'arc paramétré défini par

$$x(t) = e^{t-1} - t \qquad\qquad y(t) = t^3 - 3t.$$

1) Etudier les variations de x et y.
2) Déterminer le(s) point(s) singulier(s), leur nature ainsi que les tangentes ou demi-tangentes. Etudier, près du (des) point(s) singulier(s), la position de la courbe par rapport à la parabole définie par $y + 2 - 6x + x^2 = 0$.
3) Etudier les branches infinies à la courbe, puis la tracer.

Exercice 3 On considère l'arc paramétré donné par

$$x(t) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad\qquad y(t) = 4\frac{1-2t}{(1+t^2)^2}.$$

1) Etudier les variations de x et y. Déterminer les points où la tangente est parallèle aux axes.
2) Préciser l'allure de la courbe près du point de paramètre $t = 1$.
: 3) Vérifier que lorsque $t \to \pm\infty$, $x(t) \to 0$ et $y(t) \to 0$. On prolonge alors la courbe en adjoignant le point $(0,0)$. Effectuer un développement limité de x et y en fonction de $h = \frac{1}{t}$ lorsque $t \to \pm\infty$ (*i.e.* $h \to 0$). Déterminer la nature du point $(0,0)$ pour la courbe prolongée. Tracer la courbe.

Exercice 4 On se donne l'arc paramétré défini par

$$x(t) = \tan\,(t) + \sin(t) \qquad\qquad y(t) = \frac{1}{\cos(t)}.$$

1) Etudier les variations de x et y, et préciser les asymptotes à la courbe, ainsi que la position relative de la courbe et de l'asymptote.
3) Etudier le(s) point(s) singulier(s) de la courbe (nature, (demi-)tangente), et tracer finalement la courbe.