TD n°5 de géométrie différentielle

Exercice 1 Soit l'arc paramétré défini par

$$x(t) = 5\cos(t) - \cos(5t) \qquad\qquad y(t) = 5\sin(t) - \sin(5t).$$

1) Etudier l'arc paramétré.
2) En prenant le point de paramètre $t = 0$ comme origine, déterminer l'abscisse curviligne le long de la courbe, pour $0 \leq t \leq 2\pi$. Quelle est la longueur totale de la courbe ?

Exercice 2 Pour $\theta_0 > 0$ et $\alpha > 0$, on considère l'arc paramétré en coordonnées polaires donné par

$$r(\theta) = \frac{1}{\theta^\alpha} \qquad \text{pour} \quad \theta \geq \theta_0.$$

1) Etudier rapidement cet arc paramétré.
2) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la courbe a une longueur finie.

Exercice 3 On considère l'arc paramétré en polaire donné par

$$r(\theta) = \theta^2.$$

1) Etudier l'arc paramétré. On étudiera en particulier le(s) point(s) singulier(s) en utilisant les coordonnées cartésiennes $x(\theta) = \theta^2\cos(\theta)$ et $y(\theta) = \theta^2\sin(\theta)$.
2) Déterminer l'abscisse curviligne le long de la courbe, en prenant le point de paramètre $\theta = 0$ comme origine. En déduire la longueur de la courbe entre les points de paramètre $\theta = 0$ et $\theta = 1$.

Exercice 4 On se donne l'arc paramétré défini par

$$x(t) = \int_0^t e^{-u}(1-\cos(u))\,du \qquad\qquad y(t) = \int_0^t e^{-u}\sin(u)\,du \qquad\qquad \text{pour} \quad t \geq 0.$$

Montrer que cette courbe a une longueur finie, et la calculer.

Tourner la page, S.V.P.

Exercice 5 Longueurs de courbes et changements de normes.
On considère les normes suivantes sur $\mathbb{R}^2$, définies pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad ||(x,y)||_1 = |x|+|y|, \qquad ||(x,y)||_\infty = \max(|x|,|y|).$$

Pour un arc paramétré $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ (de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux), on définit les longueurs associées

$$\mathcal{L}_2(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||_2 \; dt, \quad \mathcal{L}_1(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||_1 \; dt, \quad \mathcal{L}_\infty(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||_\infty \; dt.$$

1) On considère dans cette question, pour $R > 0$, l'arc paramétré $\gamma_R : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}^2$ défini pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ par $\gamma_R(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$. Reconnaître la courbe γ_R. Calculer les quantités $\mathcal{L}_2(\gamma_R)$, $\mathcal{L}_1(\gamma_R)$ et $\mathcal{L}_\infty(\gamma_R)$.
2) Soit $0 \leq t < s \leq \frac{\pi}{4}$. Montrer que $0 < \cos(t) - \cos(s) < \sin(s) - \sin(t)$ (on pourra étudier la fonction $f(t) = \cos(t) + \sin(t)$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$).
On se donne une ligne polygonale $\mathcal{P} = \mathcal{P}(t_0, t_1, ..., t_n)$ dont les sommets sont les points de paramètres $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = \frac{\pi}{4}$.
3) Calculer la longueur (pour la norme $|| \cdot ||_\infty$) $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{P})$ et vérifier qu'elle vaut $\frac{R}{\sqrt{2}}$ indépendamment du nombre de points n. Retrouver alors la longueur $\mathcal{L}_\infty(\gamma_R)$ calculée en 1).
4) Calculer de même $\mathcal{L}_1(\mathcal{P})$, et retrouver aussi la longueur $\mathcal{L}_1(\gamma_R)$ calculée en 1). Plus généralement, pour un arc $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ tel que x et y sont des fonctions croissantes de t, calculer $\mathcal{L}_1(\gamma)$.

Exercice 6 Une courbe en polaires.
On se donne l'arc paramétré défini em coordonnées polaires par

$$r(\theta) = \frac{\theta^2}{1+\theta}.$$

1) Etudier les variations de r.
2) Déterminer, lorsque $\theta \to -1$ la/les asymptote(s) éventuelles à la courbe, ainsi que la position relative de la courbe par rapport à sa/ses asymptote(s).
3) Etudier l'arc lorsque $\theta \to \pm\infty$.
4) Montrer qu'il existe un unique θ tel que $r(\theta) = r'(\theta) = 0$. Etudier ce point singulier (nature, tangente ou demi-tangente éventuelle) en utilisant les coordonnées cartésiennes $x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta)$, $y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta)$.
5) Tracer finalement la courbe.