TD 6 de Géométrie différentielle

Exercice 1 Soit la courbe gauche donnée par

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = t.$$

1) Dresser le tableau des variations et étudier les points à l'infini.
2) Vérifier que la courbe appartient à un cylindre à préciser.
3) Tracer la courbe.

Exercice 2 On s'intéresse à la courbe définie en dimension 3 par

$$x(t) = \cos^2 t, \quad y(t) = \cos t, \quad z(t) = t - \sin t.$$

1) Faire le tableau des variations pour x, y et z.
2) Étudier les points singuliers.
3) Remarquer que $x(t) = (y(t))^2$ et dessiner la courbe.

Exercice 3 On veut étudier la courbe $\gamma(t)$ en dimension 3 définie par $x(t) = t - th(t)$, $y(t) = 1/ch(t)$, $z(t) = t^2$. On rappelle que

$$ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad sh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad th(t) = \frac{sh(t)}{ch(t)}.$$

1) Étudier la courbe et calculer en particulier tangente et plan osculateur.
2) Montrer que

$$(x(t) - t)^2 + (y(t))^2 = 1.$$

3) En déduire que la courbe décrit une hélice autour de $\tilde{\gamma} = (t,\ 0,\ t^2)$.
4) Étudier et tracer $\tilde{\gamma}$.
5) Tracer γ.

Exercice 4 Soit la courbe paramétrée suivante

$$x(t) = \frac{e^t}{4(e^t+1)} + \frac{2t}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad z(t) = \frac{\sqrt{1+2e^t}}{4(e^t+1)}.$$

1) Dresser le tableau des variations.
2) Étudier la courbe définie par

$$x(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad z(t) = 0.$$

En particulier, montrer qu'il s'agit d'une courbe connue particulièrement simple dont on donnera la longueur.
3) Étudier la courbe définie par

$$x(t) = \frac{e^t}{4(e^t+1)}, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = \frac{\sqrt{1+2e^t}}{4(e^t+1)}.$$

Il s'agit ici encore d'une courbe particulièrement simple.
3) Tracer la première courbe.