TD 9 de Géométrie différentielle

Exercice 1 Soit l'équation différentielle

$$y'(x) = (1 + |y(x)|)\, ln(1 + |y(x)|), \quad y(0) = 1.$$

1) Montrer qu'il existe une solution maximale.
2) Prouver qu'elle existe sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 2 On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y'(x) = \sqrt{y(x)} + x^2 \cos^2 y(x), y(0) = 1$$

1) Expliquer pourquoi une solution maximale existe.
2) Remarquer que y est croissante et en déduire que sur l'intervalle d'existence

$$y'(x) \leq (1 + x^2)\, y(x).$$

3) Montrer que l'intervalle d'existence contient au moins tout $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3 Soit le système différentiel suivant

$$\frac{dx}{dt} = v(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^3,$$
$$\frac{dv}{dt} = -\nabla V(x(t)), \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^3,$$

où x_0 et v_0 sont donnés ainsi que la fonction $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.
1) Prouver qu'il existe une solution maximale sur un intervalle que l'on notera I.
2) Soit $E(x, v) = V(x) + |v|^2/2$. Montrer que

$$E(x(t), v(t)) = E(x_0, v_0), \quad \forall t \in I.$$

3) On suppose que $V(x) \to +\infty$ quand $|x| \to +\infty$.
i) En déduire que $\inf_{x\in\mathbb{R}^3} V(x) > -\infty$.
ii) Conclure que l'intervalle d'existence est $\mathbb{R}$.
4) Que peut-on dire si l'on suppose seulement que $\inf_{x\in\mathbb{R}^3} V(x) > -\infty$?

Exercice 4 Soit le système différentiel non linéaire

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + x(t)\, y(t), \\ y'(t) = y(t) - x(t)\, y(t), \end{cases}$$

avec les données initiales $x(0) = x_0 \geq 0$ et $y(0) = y_0 \geq 0$.
1) Prouver qu'il existe une unique solution maximale sur un intervalle que l'on notera I.

2) Résoudre explicitement l'équation si $x_0 = 0$ (on cherchera la solution sous la forme $(0, y(t))$). Faire de même si $y_0 = 0$.
3) Déduire de l'unicité de la solution maximale que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, alors pour tout $t \in I$, $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$. On supposera dorénavant que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.
4) Soit $E(a, b) = a + b - \ln a - \ln b$. Montrer que pour tout $t \in I$,

$$E(x(t), y(t)) = E(x_0, y_0).$$

5) Déduire des questions 3 et 4 que $I = \mathbb{R}$.