

Retournement Temporel

Rédigé par: HENG Sokly

Encadrés par: Bernard ROUSSELET & Stéphane JUNCA

2 juin 2008

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes responsables de mémoire, M. Bernard ROUSSELET et M. Stéphane JUNCA, pour leurs explications détaillées et leurs bons conseils depuis le début de ce projet.

Je remercie également au Service de la Coopération d'Action Culturelle (SCAC), à l'ambassade de France au Cambodge, qui me donne une occasion de poursuivre mes études en France.

Je remercie aussi au Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA), qui essaie de développer les mathématiques dans mon pays. Finalement, je remercie tous les professeurs du CIMPA et les professeurs au laboratoire de Mathématiques, à l'UNSA, qui m'ont donné des cours pendant ma vie étudiante.

Table des matières

Remerciements	1
1 Objectif du projet	4
2 Etude du problème direct	5
2.1 Théorique	5
2.1.1 Solution du problème sans conditions aux limites	6
2.1.2 Energie du système	6
2.1.3 Unicité de la solution	9
2.1.4 Comportement en grand temps de la solution	10
2.1.5 Schéma numérique sans conditions aux limites	11
2.1.6 Condition de stabilité	11
2.2 Numérique	12
2.2.1 Problème direct avec la condition de Dirichlet	12
2.2.2 Problème direct avec la condition de Neumann	13
2.2.3 Problème direct avec la condition d'impédance	13
3 Etude du problème retourné	14
3.1 Problème retourné avec la condition de Dirichlet	14
3.1.1 Retournement temporel exact	15
3.1.2 Retournement temporel sans changement de vitesses	15
3.2 Problème retourné avec la condition de Neumann	19
3.2.1 Retournement temporel exact	19
3.2.2 Retournement temporel sans changement de vitesses	20
4 Résultats numériques	22
4.1 Problème retourné avec la condition de Dirichlet	23
4.1.1 Problème direct avec la condition de Dirichlet	23
4.1.2 Problème direct avec la condition de Neumann	26
4.1.3 Problème direct avec la condition d'impédance	27
4.2 Problème retourné avec la condition de Neumann	30

4.2.1	Problème direct avec la condition de Neumann	30
4.2.2	Problème direct avec la condition d'impédance	33
5	Conclusion	36
	Annexe	38

Chapitre 1

Objectif du projet

L'objectif de ce projet est l'étude du problème associé à l'équation des cordes vibrantes en dimension 1 sur un domaine $\Omega = [0, T] \times [0, 1]$, où $[0, T]$ est l'intervalle de temps, $[0, 1]$ est l'intervalle d'espace, et de faire le retournement temporel de ce problème sur un intervalle de temps $[T, 2T]$.

On commence premièrement ce projet par l'étude du problème direct. On se donne une force (ponctuelle) au second membre de l'équation des cordes vibrantes, une seule fois à l'instant initial $t = 0$. C'est-à-dire quand $t > 0$, la source n'existe plus. En mettant cette source en une position quelconque $x \in [0, 1]$, on étudie la variation de cette équation à chaque l'instant jusqu'à l'instant final $t = T$.

A l'étape suivante, on étudie le problème retourné en remontant le temps jusqu'à $t = 2T$. On fait le retournement temporel du problème ci-dessus sur l'intervalle $[T, 2T]$ en utilisant les valeurs trouvées dans $[0, T]$.

Finalement, on compare théoriquement et numériquement le résultat de la solution du problème retourné à l'instant final $t = 2T$ avec la source que l'on a mis dans le problème direct.

Chapitre 2

Etude du problème direct

On s'intéresse au problème associé à l'équation des cordes vibrantes (de vitesse de propagation $c = 1$) avec le second membre, et avec la condition d'impédance, de coefficient $z \in]0, 1[$, suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \delta_{t=0} \times g(t, x) & , \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \\ u(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) - z \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 & , \forall t \in [0, T] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, 1) + z \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (2.1)$$

où $g(t, x)$ représente le terme source, $u(0, x)$ est la valeur initiale, et $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$ est la vitesse initiale.

Le problème le plus classique du problème ci-dessus, est avec la condition de Dirichlet ou de Neumann. Dans ces 2 cas, l'énergie du système est conservée. Au contraire, l'énergie du système (2.1) est décroissante exponentiellement qu'on va montrer dans le paragraphe suivant.

Dans la partie théorique, on ne traite que le problème (2.1) sans second membre ($g = 0$), avec les conditions initiales $u(0, x) = u_0(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x)$.

Dans la partie numérique, on traite 3 problèmes différents, le problème (2.1), le problème avec la condition de Dirichlet, et le problème avec la condition de Neumann.

2.1 Théorique

Dans cette partie, on traite théoriquement l'équation des cordes vibrantes sans second membre ($g = 0$), avec les conditions initiales $u(0, x) = u_0(x)$ et

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x).$$

On représente cette équation par,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0 & , \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \\ u(0, x) = u_0(x) & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x) & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) - z \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 & , \forall t \in [0, T] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, 1) + z \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (2.2)$$

2.1.1 Solution du problème sans conditions aux limites

Soient $\Omega = [0, T] \times]0, 1[$, et $u(t, x) \in C^0(\Omega)$

Changement de variables : $y = x + t$ et $z = x - t$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \frac{\partial u}{\partial y}(y, z) - \frac{\partial u}{\partial z}(y, z) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &= \frac{\partial u}{\partial y}(y, z) + \frac{\partial u}{\partial z}(y, z) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y, z) - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}(y, z) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(y, z) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y, z) + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}(y, z) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(y, z) \end{aligned}$$

L'équation (2.2) devient : $-4 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}(y, z) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) (y, z) = 0 &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = G(z) \Rightarrow u(y, z) = G(z) + F(y) \\ \Rightarrow u(t, x) &= F(x + t) + G(x - t) \end{aligned}$$

En $t=0$:

$$\begin{aligned} u(0, x) &= F(x) + G(x) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) &= F'(x) - G'(x) = u_1(x) \end{aligned}$$

Soit w une primitive de u_1 . Alors, $F(x) - G(x) = w(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(x) &= \frac{1}{2}(u_0(x) + w(x)) \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{1}{2}(u_0(x) - w(x)) \\ \Rightarrow u(t, x) &= \frac{1}{2}(u_0(x + t) + w(x + t) + u_0(x - t) - w(x - t)) \end{aligned}$$

Donc la solution de (2.2) sans conditions aux limites, est de la forme :

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x + t) + u_0(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(s) ds, \quad \forall (t, x) \in \Omega$$

2.1.2 Energie du système

L'énergie du système (2.2) :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 \right) dx, \quad \forall t \in [0, T]$$

En $t = 0$, $E_0 = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 ((u_1(x))^2 + (u'_0(x))^2) dx$

Proposition 2.1 *L'énergie $E(t)$ est décroissante.*

Preuve. On multiplie l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0$ par $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$ et on l'intègre sur $(0, 1)$.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx - \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx = 0 \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx - \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right]_0^1 = 0 \\ & \frac{d}{dt} (E(t)) = -z \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) \right)^2 \right) \leq 0, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

Donc l'énergie $E(t)$ est décroissante. ■

Théorème 2.2 $E(t) \leq \frac{E_0}{\gamma^2} \gamma^{2t}$, $\forall t \in [0, T]$, où $\gamma = \frac{1-z}{1+z} < 1$

Preuve. Posons $f(t, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$ et $g(t, x) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$
Supposons $g(0, 0) = u_0(0)$ et $f(0, 0) = u_1(0)$, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) = 0, & \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \\ \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 0, & \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \\ g(0, 0) = u_0(0) \\ f(0, 0) = u_1(0) \\ f(t, 0) - zg(t, 0) = 0, & \forall t \in [0, T] \\ f(t, 1) + zg(t, 1) = 0, & \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

Soient $X(t, x) = f(t, x) + g(t, x)$ et $Y(t, x) = f(t, x) - g(t, x)$, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial X}{\partial x}(t, x) = 0, & \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \\ \frac{\partial Y}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial Y}{\partial x}(t, x) = 0, & \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \end{cases}$$

On multiplie par X et Y , on a,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (X^2(t, x)) - \frac{\partial}{\partial x} (X^2(t, x)) = 0, & \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \\ \frac{\partial}{\partial t} (Y^2(t, x)) + \frac{\partial}{\partial x} (Y^2(t, x)) = 0, & \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \end{cases} \quad (2.3)$$

En $x = 1$

$$\begin{cases} X(t, 1) = f(t, 1) + g(t, 1) = (1-z)g(t, 1), & \forall t \in [0, T] \\ Y(t, 1) = f(t, 1) - g(t, 1) = -(1+z)g(t, 1), & \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

$\Rightarrow X(t, 1) = -\gamma Y(t, 1)$, avec $\gamma = \frac{1-z}{1+z} < 1$

En $x = 0$

$$\begin{cases} X(t, 0) = f(t, 0) + g(t, 0) = (1+z)g(t, 0), & \forall t \in [0, T] \\ Y(t, 0) = f(t, 0) - g(t, 0) = -(1-z)g(t, 0), & \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

$\Rightarrow Y(t, 0) = -\gamma X(t, 0)$, avec $\gamma = \frac{1-z}{1+z} < 1$

On intègre (2.3) sur $(0, 1)$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (X^2(t, x)) dx &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} (X^2(t, x)) dx = X^2(t, 1) - X^2(t, 0) \\ \frac{d}{dt} \int_0^1 (X^2(t, x)) dx &= X^2(t, 1) - X^2(t, 0) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (Y^2(t, x)) dx &= - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} (Y^2(t, x)) dx = Y^2(t, 0) - Y^2(t, 1) \\ \frac{d}{dt} \int_0^1 (Y^2(t, x)) dx &= Y^2(t, 0) - Y^2(t, 1) \end{aligned}$$

Posons $I(t) = \int_0^1 (X^2(t, x) + Y^2(t, x)) dx$

Donc $I(t) = 2 \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 \right) dx = 4E(t)$, où $E(t)$ est l'énergie du système (2.2).

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^1 X^2(t, x) dx + \frac{d}{dt} \int_0^1 Y^2(t, x) dx \\ &= X^2(t, 1) - X^2(t, 0) + Y^2(t, 0) - Y^2(t, 1) \\ &= -(1-\gamma^2) (X^2(t, 0) + Y^2(t, 1)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_T^{T+1} X^2(t, x) dt &= \int_0^1 X^2(t+T, 1) dt = \int_0^1 X^2(T, 1-t) dt = \int_0^1 X^2(T, s) ds \\ \int_T^{T+1} Y^2(t, x) dt &= \int_0^1 Y^2(t+T, 1) dt = \int_0^1 Y^2(T, 1-t) dt = \int_0^1 Y^2(T, s) ds \end{aligned}$$

(Changement de variable et caractéristique)

Donc

$$\begin{aligned} I(T+1) - I(T) &= -(1-\gamma^2) \int_0^1 (X^2(T, s) + Y^2(T, s)) ds \\ &= -(1-\gamma^2) I(T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(T+1) &= \gamma^2 I(T) \\
I(T) &= \gamma^{2n} I(s), \quad T = n + s, \text{ et } s \in [0, 1] \\
\sup_{s \in [0,1]} |I(s)| &= I(0) = 4E_0 \\
\Rightarrow I(T) &\leq \frac{4E_0}{\gamma^{2s}} \gamma^{2T} \leq \frac{4E_0}{\gamma^2} \gamma^{2T}
\end{aligned}$$

Donc $\forall t \in [0, T]$,

$$E(t) \leq \frac{E_0}{\gamma^2} \gamma^{2t}, \text{ où } \gamma = \frac{1-z}{1+z} < 1 \quad \blacksquare$$

2.1.3 Unicité de la solution

Théorème 2.3 *L'équation (2.2) admet une solution unique.*

Preuve. Soient u et v , 2 solutions distinctes de (2.2).

Soit $w = u - v$, on a bien

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \right) - \\
&\quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) \right) \\
&= 0, \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(0, x) = u(0, x) - v(0, x) &= u_0(x) - u_0(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1] \\
\frac{\partial w}{\partial t}(0, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) - \frac{\partial v}{\partial t}(0, x) &= u_1(x) - u_1(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t}(t, 0) - z \frac{\partial w}{\partial x}(t, 0) &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) - z \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) \right) - \\
&\quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}(t, 0) - z \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) \right) = 0, \quad \forall t \in [0, T]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t}(t, 1) + z \frac{\partial w}{\partial x}(t, 1) &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, 1) + z \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) \right) - \\
&\quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}(t, 1) + z \frac{\partial v}{\partial x}(t, 1) \right) = 0, \quad \forall t \in [0, T]
\end{aligned}$$

Donc w est la solution de (2.2) dans le cas $w(0, x) = 0$, $\frac{\partial w}{\partial t}(0, x) = 0$.
D'après la **Proposition 2.1**, on a $\forall t \in [0, T]$

$$E_w(t) \leq E_w(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial w}{\partial t}(0, x) \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}(0, x) \right)^2 \right) dx = 0$$

$\Rightarrow E_w(t) = 0$, car $E_w(t) \geq 0$, $\forall t \in [0, T]$

$\Rightarrow \nabla_{t,x} w = (0, 0) \Rightarrow w(t, x) = Cte = w(0, x) = 0 \Rightarrow w(t, x) \equiv 0$

Donc u et v sont identiques. \blacksquare

2.1.4 Comportement en grand temps de la solution

Lemme 2.4 Soit $f \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$

Si $\int_0^{+\infty} |f'(x)| dx$ est convergente, alors $f(x)$ a une limite quand $x \rightarrow +\infty$.

Preuve du Lemme. On a $\forall t \in [0, +\infty[$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(s) ds$$

$f(0)$: est une constante

$\int_0^x f'(s) ds$: converge quand $x \rightarrow +\infty$

Donc $f(x)$ a une limite quand $x \rightarrow +\infty$ ■

Proposition 2.5 Soit $u(t, x)$, la solution de (2.2), alors $u(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} u_\infty$, où u_∞ ne dépend que de u_0 et u_1 .

Preuve. On admet que u converge quand $t \rightarrow +\infty$

Posons $I(t) = \int_0^1 u(t, x) dx$

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \right) dx = 0$$

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) dx = \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) dx = \left[\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right]_0^1 = -\frac{1}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, 1) + \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) \right)$$

$$\int_0^T I''(t) dt = -\frac{1}{z} \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, 1) + \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) \right) dt$$

$$I'(T) - I'(0) = -\frac{1}{z} (u(T, 1) + u(T, 0) - u(0, 1) - u(0, 0))$$

D'après le **Théorème 2.2**, on a, $I'(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$

Donc quand $T \rightarrow +\infty$,

$$-\int_0^1 u_1(x) dx = -\frac{1}{z} (2u_\infty - u_0(1) - u_0(0))$$

$$u_\infty = \frac{1}{2} (u_0(1) + u_0(0)) + \frac{z}{2} \int_0^1 u_1(x) dx$$

D'après le **Lemme 2.4**, on a

$$u(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} u_\infty, \text{ où } u_\infty = \frac{1}{2} (u_0(1) + u_0(0)) + \frac{z}{2} \int_0^1 u_1(x) dx \quad \blacksquare$$

2.1.5 Schéma numérique sans conditions aux limites

La prise en compte des conditions aux limites de ce schéma est indiquée dans la partie numérique.

Soient $\Omega = [0, T] \times]0, 1[$ et $u \in C^4(\Omega)$. La formule de Taylor donne :

$$\begin{aligned} u(t + \Delta t, x) + u(t - \Delta t, x) - 2u(t, x) &= \Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) + O(\Delta t^4) \\ u(t, x + \Delta x) + u(t, x - \Delta x) - 2u(t, x) &= \Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + O(\Delta x^4) \end{aligned}$$

L'approximation l'ordre 2 en temps de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) \approx \frac{1}{\Delta t^2} (u(t + \Delta t, x) + u(t - \Delta t, x) - 2u(t, x))$$

L'approximation l'ordre 2 en espace de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \approx \frac{1}{\Delta x^2} (u(t, x + \Delta x) + u(t, x - \Delta x) - 2u(t, x))$$

Soient u_j^n , l'approximation de $u(t_n = n\Delta t, x_j = j\Delta x)$ et $\beta = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2$

Pour approcher le problème (2.2) sans conditions aux limites, on utilise le schéma numérique suivant

$$u_j^{n+1} + u_j^{n-1} - 2u_j^n = \beta (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n) \quad (2.4)$$

Ce schéma est l'ordre 2 en temps et en espace.

2.1.6 Condition de stabilité

Posons $u_j^n = a_n e^{ikx_j}$ et $u_j^{n-1} = b_n e^{ikx_j}$

Le schéma numérique (2.4) devient

$$\begin{cases} a_{n+1} = \left(\beta \left(e^{ik\Delta x + e^{-ik\Delta x}} \right) + 2(1 - \beta) \right) a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 - 4\beta \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice d'amplification A}} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Matrice d'amplification A

Prenons, $\theta = 1 - 2\beta \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}$

Le polynôme caractéristique de A : $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\theta\lambda + 1$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = 0 &\iff \lambda^2 - 2\theta\lambda + 1 = 0 \\ \Delta' &= \theta^2 - 1 \end{aligned}$$

◦ Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow |\theta| > 1$, alors

$$\begin{cases} \lambda_1 = \theta + \sqrt{\Delta'} \\ \lambda_2 = \theta - \sqrt{\Delta'} \end{cases}$$

Le schéma est instable, car $|\lambda_1| > 1$ ou $|\lambda_2| > 1$.

◦ Si $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow |\theta| \leq 1$, alors

$$\begin{cases} \lambda_1 = \theta + i\sqrt{\Delta'} \\ \lambda_2 = \theta - i\sqrt{\Delta'} \end{cases}$$

Le schéma est stable si et seulement si $\lambda_1\lambda_2 \leq 1$

$$|\lambda|^2 = \lambda_1\lambda_2 = \theta^2 + \Delta' = 2\theta^2 - 1 \leq 1 \text{ vérifié (car } |\theta| \leq 1)$$

$$|\theta| \leq 1 \Leftrightarrow \beta \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \alpha^2 \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \alpha \leq 1, \text{ avec } \beta = \alpha^2 = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2$$

Donc le schéma est stable sous la condition CFL : $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$

2.2 Numérique

Dans cette partie, on étudie l'équation des cordes vibrantes avec second membre et avec la condition de Dirichlet, de Neumann, et d'impédance. On prend la fonction Gaussienne très centrée, $g(t, x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{t^2+x^2}{2\sigma^2}}$, comme le terme source, et on choisit $u(t, x) = 0$ pour tout $t < 0$. Le terme source n'existe qu'à l'instant $t = 0$.

Soit g_j^0 , l'approximation de $g(t, x)$ en $(t_n = 0, x_j = j\Delta x)$.

On a le schéma numérique en $t = \Delta t$,

$$u_j^1 = (\Delta t)^2 g_j^0 \quad (2.5)$$

Pour approcher les 3 problèmes ci-dessous, on utilise le schéma numérique (2.5) pour $t = \Delta t$ et le schéma numérique (2.4) pour $t > \Delta t$.

2.2.1 Problème direct avec la condition de Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \delta_{t=0} \times g(t, x) & , \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \\ u(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ u(t, 0) = 0 & , \forall t \in [0, T] \\ u(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (2.6)$$

Conditions aux limites

En $x = 0 : u_0^n = 0$

En $x = 1 : u_J^n = 0$, où $J = \frac{1}{\Delta x}$

2.2.2 Problème direct avec la condition de Neumann

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \delta_{t=0} \times g(t, x) \quad , \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \\ u(0, x) = 0 \quad , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 \quad , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 \quad , \forall t \in [0, T] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0 \quad , \forall t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (2.7)$$

D'après la formule de Taylor,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &= \frac{1}{\Delta x} (u(t, x + \Delta x) - u(t, x)) + O(\Delta x) \\ \text{ou} &= \frac{1}{\Delta x} (u(t, x) - u(t, x - \Delta x)) + O(\Delta x) \end{aligned}$$

On utilise le schéma plus simple d'ordre 1 pour approcher $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0)$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 1)$.

Conditions aux limites

En $x = 0$: $u_0^n = u_1^n$

En $x = 1$: $u_J^n = u_{J-1}^n$, où $J = \frac{1}{\Delta x}$

2.2.3 Problème direct avec la condition d'impédance

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \delta_{t=0} \times g(t, x) \quad , \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \\ u(0, x) = 0 \quad , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 \quad , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) - z \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 \quad , \forall t \in [0, T] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, 1) + z \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0 \quad , \forall t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (2.8)$$

D'après la formule de Taylor,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{\Delta t} (u(t + \Delta t, x) - u(t, x)) + O(\Delta t)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &= \frac{1}{\Delta x} (u(t, x + \Delta x) - u(t, x)) + O(\Delta x) \\ \text{ou} &= \frac{1}{\Delta x} (u(t, x) - u(t, x - \Delta x)) + O(\Delta x) \end{aligned}$$

On utilise le schéma plus simple d'ordre 1 en temps pour approcher $\frac{\partial u}{\partial t}(t, 0)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(t, 1)$, et d'ordre 1 en espace pour approcher $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0)$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 1)$.

Conditions aux limites

En $x = 0$: $u_0^{n+1} = u_0^n + \alpha z (u_1^n - u_0^n)$

En $x = 1$: $u_J^{n+1} = u_J^n + \alpha z (u_{J-1}^n - u_J^n)$, où $J = \frac{1}{\Delta x}$

Chapitre 3

Etude du problème retourné

Dans ce chapitre, on étudie le problème retourné pour le problème direct dans le chapitre précédent. En réalité, ce problème est posé dans $[T, 2T] \times [0, 1]$, mais on travaille techniquement dans $[0, T] \times [0, 1]$. On utilise la même équation comme le problème direct, mais sans second membre ($g = 0$). On traitera théoriquement et numériquement le cas de retournement temporel exact et le cas de retournement temporel sans changement de vitesses, avec la condition de Dirichlet et de Neumann. Les données initiales de ce problème sont les valeurs qu'on a obtenu dans le problème direct.

Remarque : On ne fait jamais le retournement temporel avec la condition d'impédance.

3.1 Problème retourné avec la condition de Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) = 0 & , \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \\ v(0, x) = v_0(x) = u(T, x) & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial v}{\partial t}(0, x) = v_1 = \pm \frac{\partial u}{\partial t}(T, x) & , \forall x \in [0, 1] \\ v(t, 0) = u(T - t, 0) & , \forall t \in [0, T] \\ v(t, 1) = u(T - t, 1) & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.1)$$

Pour approcher le problème (3.1), on utilise le schéma numérique (2.4), avec les conditions aux limites suivantes :

En $x = 0$: $v_0^n = u_0^{L-n}$, où $L = \frac{T}{\Delta t}$

En $x = 1$: $v_J^n = u_J^{L-n}$, où $J = \frac{1}{\Delta x}$

3.1.1 Retournement temporel exact

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) = 0 & , \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \\ v(0, x) = v_0(x) = u(T, x) & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial v}{\partial t}(0, x) = v_1(x) = -\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) & , \forall x \in [0, 1] \\ v(t, 0) = u(T - t, 0) & , \forall t \in [0, T] \\ v(t, 1) = u(T - t, 1) & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.2)$$

où u est la solution du problème direct, et v est la solution exacte du problème retourné (3.2).

Théorème 3.1 $\boxed{v(T, x) = u(0, x) = u_0(x)}$

Preuve. Soit $w(t, x) = u(T - t, x)$

On a bien que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(T - t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(T - t, x) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \end{aligned}$$

$$w(0, x) = u(T, x) = v_0(x), \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(0, x) = -\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) = v_1(x), \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$w(t, 0) = u(T - t, 0) = v(t, 0), \quad \forall t \in [0, T]$$

$$w(t, 1) = u(T - t, 1) = v(t, 1), \quad \forall t \in [0, T]$$

Donc w est aussi une solution de (3.2).

Par l'unicité de la solution de (3.2), on a, $v(t, x) = w(t, x) = u(T - t, x)$

D'où $v(T, x) = u(T - T, x) = u(0, x) = u_0(x)$ ■

Proposition 3.2 $\boxed{\frac{\partial v}{\partial t}(T, x) = -\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = -u_1(x)}$

Preuve. Soit $v(t, x) = u(T - t, x)$, la solution de (3.2).

On a, $\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = -\frac{\partial u}{\partial t}(T - t, x)$

D'où $\frac{\partial v}{\partial t}(T, x) = -\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = -u_1(x)$ ■

3.1.2 Retournement temporel sans changement de vitesses

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) = 0 & , \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \\ v(0, x) = v_0 = u(T, x) & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial v}{\partial t}(0, x) = v_1(x) = +\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) & , \forall x \in [0, 1] \\ v(t, 0) = u(T - t, 0) & , \forall t \in [0, T] \\ v(t, 1) = u(T - t, 1) & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.3)$$

où u est la solution du problème direct et v est la solution du problème retourné (3.3).

Posons v_{ex} : la solution exacte du problème retourné (3.2).

a). Problème direct avec la condition de Dirichlet ou de Neumann

Théorème 3.3 $\boxed{\int_0^1 (v(T, x) - u_0(x))^2 dx \leq 2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x)\right)^2 dx}$

Preuve. Soit $R(t, x) = v(t, x) - v_{ex}(t, x)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(t, x) &= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) \right) - \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 v_{ex}}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 v_{ex}}{\partial x^2}(t, x) \right) \\ &= 0, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \end{aligned}$$

$$R(0, x) = v(0, x) - v_{ex}(0, x) = u(T, x) - u(T, x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\frac{\partial R}{\partial t}(0, x) = \frac{\partial v}{\partial t}(0, x) - \frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(0, x) = 2 \frac{\partial u}{\partial t}(T, x), \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$R(t, 0) = v(t, 0) - v_{ex}(t, 0) = u(T-t, 0) - u(T-t, 0) = 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

$$R(t, 1) = v(t, 1) - v_{ex}(t, 1) = u(T-t, 1) - u(T-t, 1) = 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

Donc R est la solution de (3.1) dans le cas $R(0, x) = 0$, $\frac{\partial R}{\partial t}(0, x) = 2 \frac{\partial u}{\partial t}(T, x)$, $R(t, 0) = R(t, 1) = 0$

Dans ce cas, l'énergie de R est conservée.

$$\begin{aligned} E_R(t) = E_R(0) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial R}{\partial t}(0, x) \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial R}{\partial x}(0, x) \right)^2 dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

On a,

$$R(T, x) = \int_0^x \frac{\partial R}{\partial x}(T, x) dx, \quad \text{car } R(t, 0) = 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

D'après Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
(R(T, x))^2 &= \left(\int_0^x \frac{\partial R}{\partial x}(0, x) dx \right)^2 \leq \left(\int_0^x dx \right) \left(\int_0^x \left(\frac{\partial R}{\partial x}(T, x) \right)^2 dx \right) \\
&\leq (2x) \left(\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial R}{\partial x}(T, x) \right)^2 dx \right) \\
&\leq (2x) E_R(T) = (2x) E_R(0) \\
\int_0^1 (R(T, x))^2 dx &\leq E_R(0) \int_0^1 2x dx = E_R(0) = 2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx \\
\int_0^1 (v(T, x) - v_{ex}(T, x))^2 dx &\leq 2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx \quad (3.4)
\end{aligned}$$

D'après le **Théorème 3.1**, on a, $v_{ex}(T, x) = u(0, x) = u_0(x)$.

Donc $\int_0^1 (v(T, x) - u_0(x))^2 dx \leq 2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx$ ■

Théorème 3.4 $\int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t}(T, x) - u_1(x) \right)^2 dx \leq 4 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx$

Preuve. Soit $R(t, x) = v(t, x) - v_{ex}(t, x)$.

Conservation de l'énergie de R :

$$\begin{aligned}
E_R(t) &= E_R(T) = E_R(0) = 2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx, \quad \forall t \in [0, T] \\
E_R(T) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial R}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial R}{\partial x}(T, x) \right)^2 dx \\
E_R(T) &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial R}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx \\
\int_0^1 \left(\frac{\partial R}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx &\leq 2E_R(T) = 4 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx \\
\int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t}(T, x) - \frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx &\leq 4 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx \quad (3.5)
\end{aligned}$$

D'après la **Proposition 3.2**, $\frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(T, x) = -\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = -u_1(x)$
On a, $|\frac{\partial v}{\partial t}(T, x) - \frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(T, x)| \geq |\frac{\partial v}{\partial t}(T, x) - u_1(x)|$, car $u_1(x) > 0$
Donc $\int_0^1 (\frac{\partial v}{\partial t}(T, x) - u_1(x))^2 dx \leq 4 \int_0^1 (\frac{\partial u}{\partial t}(T, x))^2 dx$ ■

b). Problème direct avec la condition d'impédance

Théorème 3.5 $\int_0^1 (v(T, x) - v_{ex}(T, x))^2 dx \leq \frac{4E_0}{\gamma^2} \gamma^{2T}$, où $\gamma = \frac{1-z}{1+z} < 1$.

Preuve. D'après (3.4)

$$\int_0^1 (v(T, x) - v_{ex}(T, x))^2 dx \leq 2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx$$

Et d'après le **Théorème 2.2**,

$$E(T) \leq \frac{E_0}{\gamma^2} \gamma^{2T}, \text{ avec } \gamma = \frac{1-z}{1+z} < 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (v(T, x) - v_{ex}(T, x))^2 dx \leq \frac{4E_0}{\gamma^2} \gamma^{2T}$$

Donc, $\int_0^1 (v(T, x) - v_{ex}(T, x))^2 dx \leq \frac{4E_0}{\gamma^2} \gamma^{2T}$, où $\gamma = \frac{1-z}{1+z} < 1$ ■

Théorème 3.6 $\int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t}(T, x) - \frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx \leq \frac{8E_0}{\gamma^2} \gamma^{2T}$, où $\gamma = \frac{1-z}{1+z} < 1$.

Preuve. D'après (3.5),

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t}(T, x) - \frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx \leq 4 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx$$

Et d'après le **Théorème 2.2**,

$$E(T) \leq \frac{E_0}{\gamma^2} \gamma^{2T}, \text{ avec } \gamma = \frac{1-z}{1+z} < 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t}(T, x) - \frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx \leq \frac{8E_0}{\gamma^2} \gamma^{2T}$$

Donc $\int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t}(T, x) - \frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx \leq \frac{8E_0}{\gamma^2} \gamma^{2T}$, où $\gamma = \frac{1-z}{1+z} < 1$. ■

3.2 Problème retourné avec la condition de Neumann

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) = 0 \quad , \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \\ v(0, x) = v_0(x) = u(T, x) \quad , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial v}{\partial t}(0, x) = v_1(x) = \pm \frac{\partial u}{\partial t}(T, x) \quad , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(T - t, 0) \quad , \forall t \in [0, T] \\ \frac{\partial v}{\partial x}(t, 1) = \frac{\partial u}{\partial x}(T - t, 1) \quad , \forall t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (3.6)$$

D'après la formule de Taylor,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &= \frac{1}{\Delta x} (u(t, x + \Delta x) - u(t, x)) + O(\Delta x) \\ \text{ou} &= \frac{1}{\Delta x} (u(t, x) - u(t, x - \Delta x)) + O(\Delta x) \end{aligned}$$

On utilise le schéma plus simple d'ordre 1 pour approcher $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0)$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 1)$. Donc, pour approcher le problème (3.6), on utilise aussi le schéma numérique (2.4), avec les conditions aux limites suivantes :

En $x = 0$: $v_0^n = v_1^n - u_1^{L-n} - u_0^{L-n}$, où $L = \frac{T}{\Delta t}$
 En $x = 1$: $v_J^n = v_{J-1}^n - u_{J-1}^{L-n} - u_J^{L-n}$, où $J = \frac{1}{\Delta x}$

3.2.1 Retournement temporel exact

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) = 0 \quad , \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \\ v(0, x) = v_0(x) = u(T, x) \quad , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial v}{\partial t}(0, x) = v_1(x) = -\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) \quad , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(T - t, 0) \quad , \forall t \in [0, T] \\ \frac{\partial v}{\partial x}(t, 1) = \frac{\partial u}{\partial x}(T - t, 1) \quad , \forall t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (3.7)$$

où u est la solution du problème direct, et v est la solution exacte du problème retourné (3.7).

Théorème 3.7 $\boxed{v(T, x) = u(0, x) = u_0(x)}$

Preuve. Soit $w(t, x) = u(T - t, x)$

On a bien que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(T - t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(T - t, x) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(0, x) &= u(T, x) = v_0(x), \quad \forall x \in [0, 1] \\
\frac{\partial w}{\partial t}(0, x) &= -\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) = v_1(x), \quad \forall x \in [0, 1] \\
\frac{\partial w}{\partial x}(t, 0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(T - t, 0) = v(t, 0), \quad \forall t \in [0, T] \\
\frac{\partial w}{\partial x}(t, 1) &= \frac{\partial u}{\partial x}(T - t, 1) = v(t, 1), \quad \forall t \in [0, T]
\end{aligned}$$

Donc w est aussi une solution de l'équation (3.7).

Par l'unicité de la solution de (3.7), on a, $v(t, x) = w(t, x) = u(T - t, x)$

D'où $v(T, x) = u(T - T, x) = u(0, x) = u_0(x)$ ■

Proposition 3.8 $\boxed{\frac{\partial v}{\partial t}(T, x) = -\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = -u_1(x)}$

Preuve. La démonstration est identique à celle de la **Proposition 3.2**. ■

3.2.2 Retournement temporel sans changement de vitesses

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) = 0 & , \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \\
v(0, x) = v_0(x) = u(T, x) & , \forall x \in [0, 1] \\
\frac{\partial v}{\partial t}(0, x) = v_1(x) = +\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) & , \forall x \in [0, 1] \\
\frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(T - t, 0) & , \forall t \in [0, T] \\
\frac{\partial v}{\partial x}(t, 1) = \frac{\partial u}{\partial x}(T - t, 1) & , \forall t \in [0, T]
\end{array} \right. \quad (3.8)$$

où u est la solution du problème direct et v est la solution du problème retourné (3.8).

Posons, v_{ex} : la solution exacte du problème retourné (3.7).

a). Problème direct avec la condition de Neumann

Théorème 3.9 $\boxed{\int_0^1 (v(T, x) - u_0(x))^2 dx \leq 2T^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x)\right)^2 dx}$

Preuve. Soit $I(t) = \int_0^1 (R(t, x))^2 dx$, où $R(t, x) = v(t, x) - v_{ex}(t, x)$

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \int_0^1 2(R(t, x)) \left(\frac{dR}{dt}(t, x)\right) dx \\
&\leq 2 \left(\int_0^1 (R(t, x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \left(\frac{dR}{dt}(t, x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} ; \quad (\text{Cauchy-Schwarz})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I' &\leq 2\sqrt{I}\sqrt{E_R(t)} = 2\sqrt{I}\sqrt{E_R(0)} \\
\int_0^T \frac{I'}{2\sqrt{I}} dt &\leq \int_0^T \sqrt{E_R(0)} dt \\
\sqrt{I(T)} - \sqrt{I(0)} &\leq T\sqrt{E_R(0)} \Rightarrow I(T) \leq E_R(0)T^2, \text{ (car } I(0) = 0) \\
\int_0^1 (v(T, x) - v_{ex}(T, x))^2 dx &\leq E_R(T)T^2 \tag{3.9}
\end{aligned}$$

D'après le **Théorème 3.7**, on a, $v_{ex}(T, x) = u(0, x) = u_0(x)$.

$$\text{Donc } \int_0^1 (v(T, x) - u_0(x))^2 dx \leq 2T^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x)\right)^2 dx \quad \blacksquare$$

$$\text{Théorème 3.10 } \boxed{\int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t}(T, x) - u_1(x)\right)^2 dx \leq 4 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x)\right)^2 dx}$$

Preuve. La démonstration est identique à celle du **Théorème 3.4** \blacksquare

b). Retournement temporel pour le problème direct la condition d'impédance

$$\text{Théorème 3.11 } \boxed{\int_0^1 (v(T, x) - v_{ex}(T, x))^2 dx \leq \frac{4E_0T^2}{\gamma^2} \gamma^{2T}, \text{ où } \gamma = \frac{1-z}{1+z} < 1.}$$

Preuve. D'après (3.9),

$$\int_0^1 (v(T, x) - v_{ex}(T, x))^2 dx \leq 2T^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x)\right)^2 dx$$

Et d'après le **Théorème 2.2**,

$$\begin{aligned}
E(T) &\leq \frac{E_0}{\gamma^2} \gamma^{2T}, \text{ avec } \gamma = \frac{1-z}{1+z} < 1 \\
\Rightarrow \int_0^1 (v(T, x) - v_{ex}(T, x))^2 dx &\leq \frac{4E_0T^2}{\gamma^2} \gamma^{2T}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \int_0^1 (v(T, x) - v_{ex}(T, x))^2 dx \leq \frac{4E_0T^2}{\gamma^2} \gamma^{2T}, \text{ où } \gamma = \frac{1-z}{1+z} < 1. \quad \blacksquare$$

$$\text{Théorème 3.12 } \boxed{\int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t}(T, x) - \frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(T, x)\right)^2 dx \leq \frac{8E_0}{\gamma^2} \gamma^{2T}, \text{ où } \gamma = \frac{1-z}{1+z} < 1.}$$

Preuve. La démonstration est identique à celle du **Théorème 3.6** \blacksquare

Chapitre 4

Résultats numériques

Dans ce chapitre, on fait numériquement le problème direct avec 3 conditions aux limites différentes (Dirichlet, Neumann, et Impédance) dans $[0, T] \times [0, 1]$, et le problème retourné avec 2 conditions aux limites différentes (Dirichlet, Neumann) dans $[T, 2T] \times [0, 1]$.

Le problème direct : On teste le schéma numérique avec la fonction Gaussienne g centrée une fois en $x = \frac{1}{2}$, et une autre en $x = \frac{1}{4}$. On prend $u|_{t < 0} = 0$, c'est-à-dire $u^0 = 0$ à l'instant $t = t_0$. D'après le schéma (2.5), on peut trouver la valeur u^1 de u à l'instant $t = t_1$. On peut dire qu'on a mis le terme source sur la vitesse de u à l'instant $t_0 = 0$ (théorie de distributions).

Le problème retourné : On trouve la solution v (retournement temporel sans changement de vitesse), et v_{ex} (retournement temporel exact) en utilisant la solution du problème direct. En théorie, pour le problème direct avec la condition de Dirichlet ou de Neumann, la vitesse de v à l'instant final $2T$, est l'approximation du terme source dans le problème direct qu'on veut trouver. Mais pour le problème direct avec la condition d'impédance, la vitesse de v à l'instant final $2T$, est l'approximation de la vitesse de v_{ex} à l'instant final $2T$ qui est le terme source avec le signe opposé.

4.1 Problème retourné avec la condition de Dirichlet

Soient u la solution du problème direct, v_{ex} la solution du problème retourné exact, et v la solution du problème retourné sans changement de vitesse.

4.1.1 Problème direct avec la condition de Dirichlet

Le cas : $\alpha = 0.5$, $N = 100$, $T = 1$, $\sigma = 0.05$, $g(t, x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{t^2 + (x - \frac{1}{2})^2}{2\sigma^2}}$
Problème direct

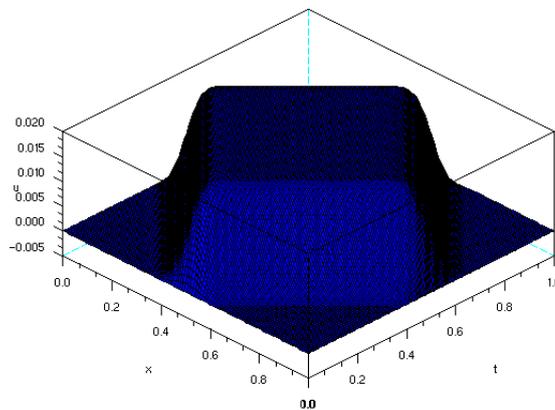


FIG. 4.1 - u_j^n

Problème retourné exact

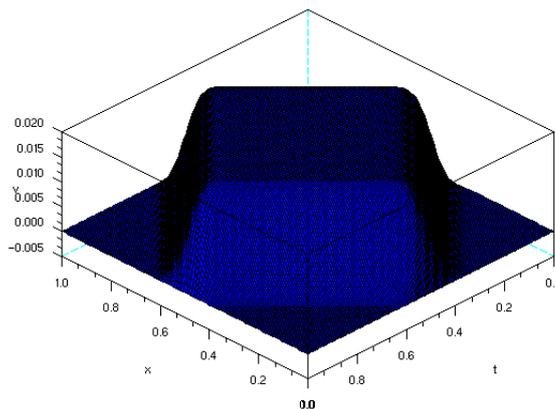


FIG. 4.2 - v_j^n

Problème retourné sans changement de vitesse

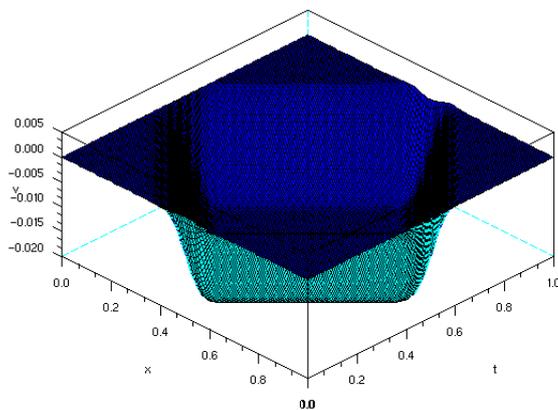


FIG. 4.3 - v_j^n

L'approximation de la vitesse de v , v_{ex} à l'instant final $t = 2T$, et de la vitesse de u à l'instant initial $t = 0$ (le terme source).

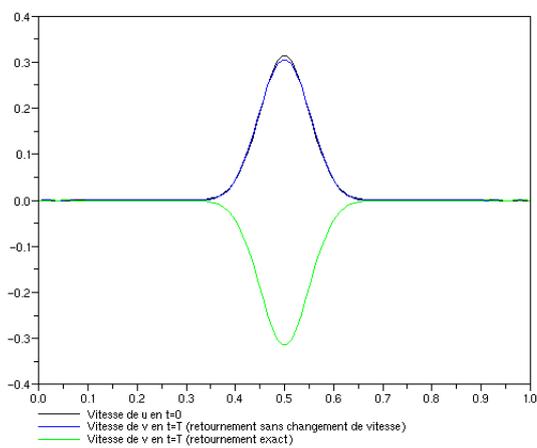


FIG. 4.4 - $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(2T, x)$, et $\frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(2T, x)$

Le cas : $\alpha = 0.5$, $N = 100$, $T = 1.7$, $\sigma = 0.05$, $g(t, x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{t^2 + (x - \frac{1}{4})^2}{2\sigma^2}}$
 L'approximation de la vitesse de v , v_{ex} à l'instant final $t = 2T$, et de la vitesse de u à l'instant initial $t = 0$ (le terme source).

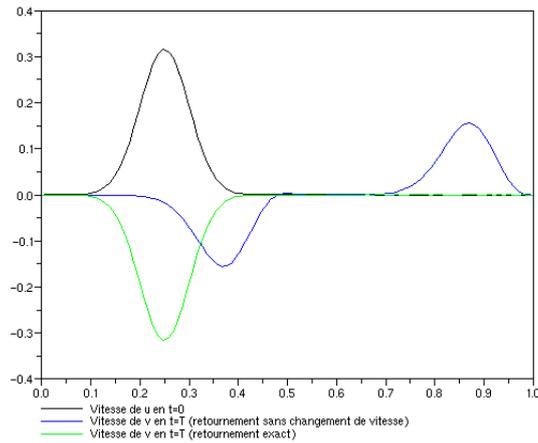


FIG. 4.5 - $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(2T, x)$, et $\frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(2T, x)$

Le cas : $\alpha = 0.5$, $N = 100$, $T = 10.5$, $\sigma = 0.05$, $g(t, x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{t^2 + (x - \frac{1}{4})^2}{2\sigma^2}}$
 L'approximation de la vitesse de v , v_{ex} à l'instant final $t = 2T$, et de la vitesse de u à l'instant initial $t = 0$ (le terme source).

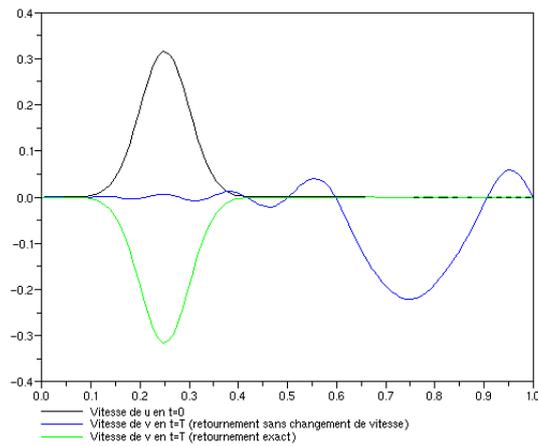


FIG. 4.6 - $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(2T, x)$, et $\frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(2T, x)$

4.1.2 Problème direct avec la condition de Neumann

On a le résultat d'approximation de la vitesse de v , v_{ex} à l'instant final $t = 2T$, et de la vitesse de u à l'instant initial $t = 0$ (le terme source).

Le cas : $\alpha = 0.5$, $N = 100$, $T = 1$, $\sigma = 0.05$, $g(t, x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{t^2 + (x - \frac{1}{2})^2}{2\sigma^2}}$

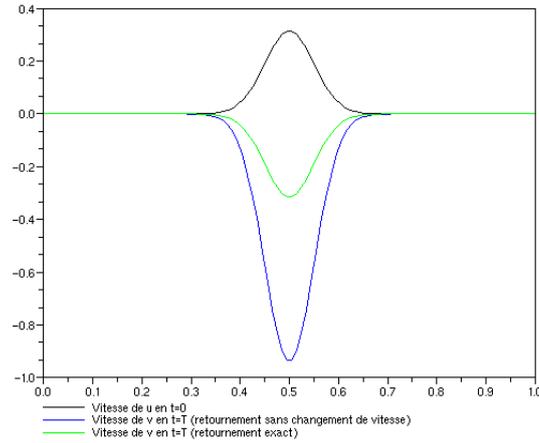


FIG. 4.7 - $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(2T, x)$, et $\frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(2T, x)$

Le cas : $\alpha = 0.5$, $N = 100$, $T = 2$, $\sigma = 0.05$, $g(t, x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{t^2 + (x - \frac{1}{2})^2}{2\sigma^2}}$

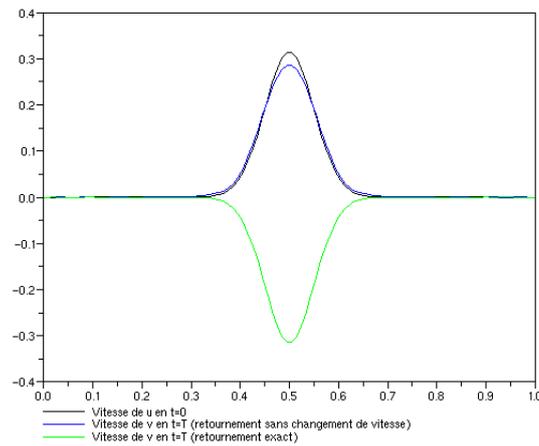


FIG. 4.8 - $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(2T, x)$, et $\frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(2T, x)$

4.1.3 Problème direct avec la condition d'impédance

Le cas : $\alpha = 0.5$, $N = 100$, $T = 1$, $z = 0.5$, $\sigma = 0.05$, $g(t, x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{t^2 + (x - \frac{1}{2})^2}{2\sigma^2}}$
Problème direct

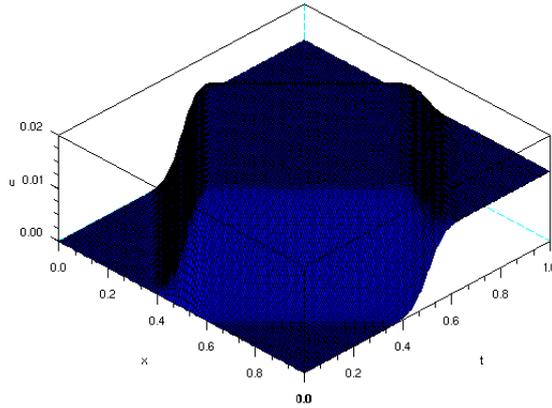


FIG. 4.9 - u_j^n

Problème retourné exact

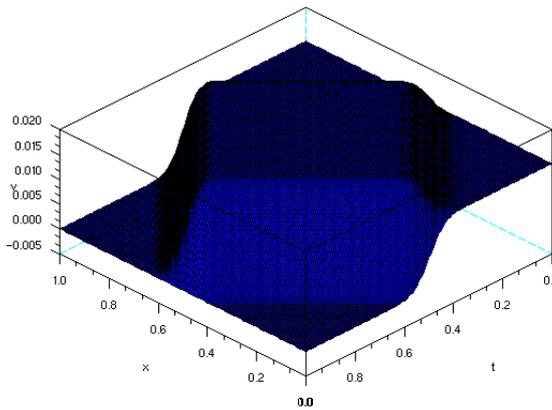


FIG. 4.10 - v_j^n

Problème retourné sans changement de vitesse

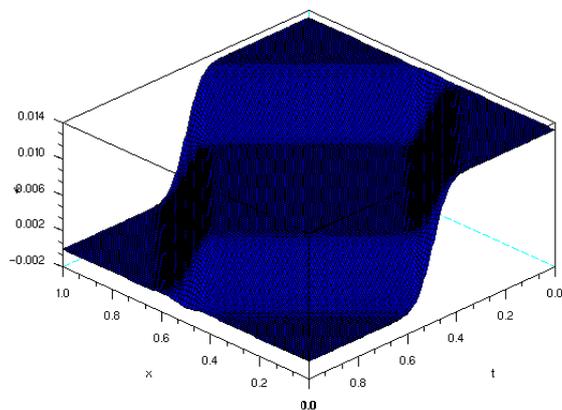


FIG. 4.11 - v_j^n

L'approximation de la vitesse de v , v_{ex} à l'instant final $t = 2T$, et de la vitesse de u à l'instant initial $t = 0$ (le terme source).

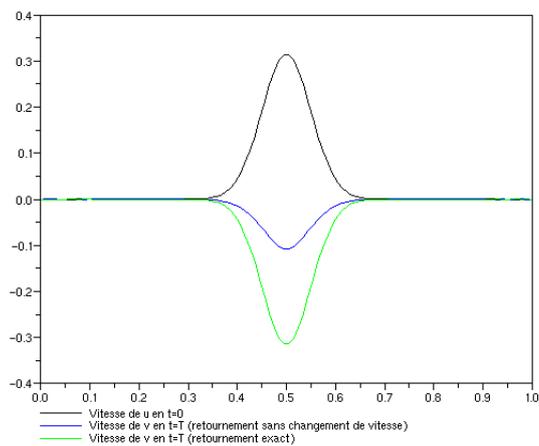


FIG. 4.12 - $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(2T, x)$, et $\frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(2T, x)$

Le cas : $\alpha = 0.5$, $N = 100$, $T = 1.7$, $z = 0.5$, $\sigma = 0.05$, $g(t, x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{t^2 + (x - \frac{1}{4})^2}{2\sigma^2}}$
 L'approximation de la vitesse de v , v_{ex} à l'instant final $t = 2T$, et de la vitesse de u à l'instant initial $t = 0$ (le terme source).

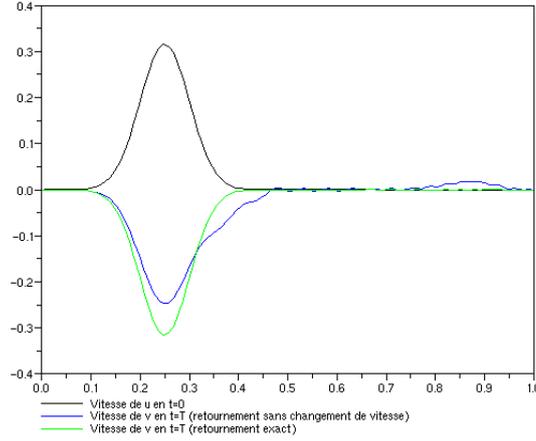


FIG. 4.13 – $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(2T, x)$, et $\frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(2T, x)$

Le cas : $\alpha = 0.5$, $N = 100$, $T = 10.5$, $z = 0.5$, $\sigma = 0.05$, $g(t, x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{t^2 + (x - \frac{1}{4})^2}{2\sigma^2}}$
 L'approximation de la vitesse de v , v_{ex} à l'instant final $t = 2T$, et de la vitesse de u à l'instant initial $t = 0$ (le terme source).

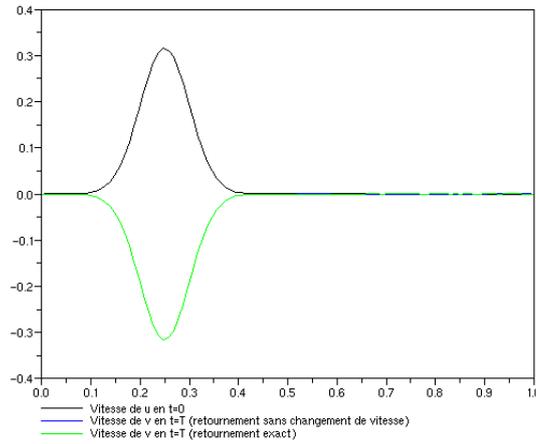


FIG. 4.14 – $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(2T, x)$, et $\frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(2T, x)$

4.2 Problème retourné avec la condition de Neumann

4.2.1 Problème direct avec la condition de Neumann

Le cas : $\alpha = 0.5$, $N = 100$, $T = 1$, $\sigma = 0.05$, $g(t, x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{t^2 + (x - \frac{1}{2})^2}{2\sigma^2}}$
Problème direct

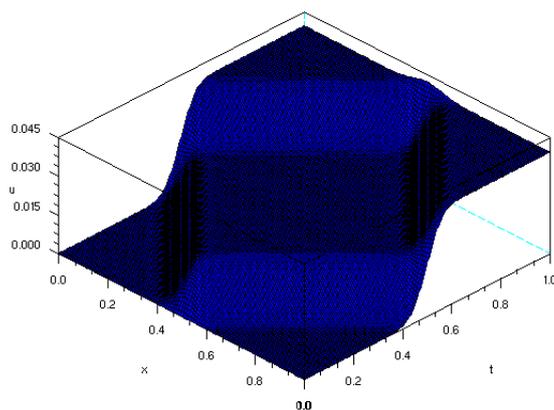


FIG. 4.15 - u_j^n

Problème retourné exact

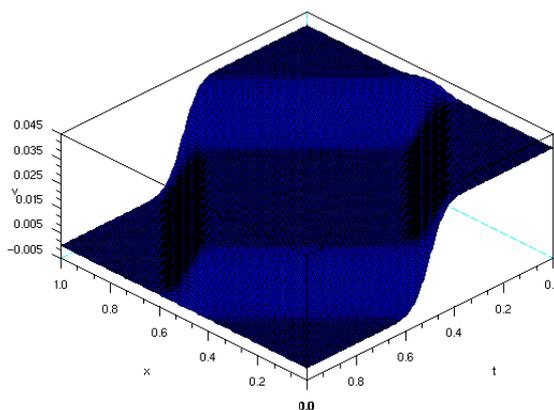


FIG. 4.16 - v_j^n

Problème retourné sans changement de vitesse

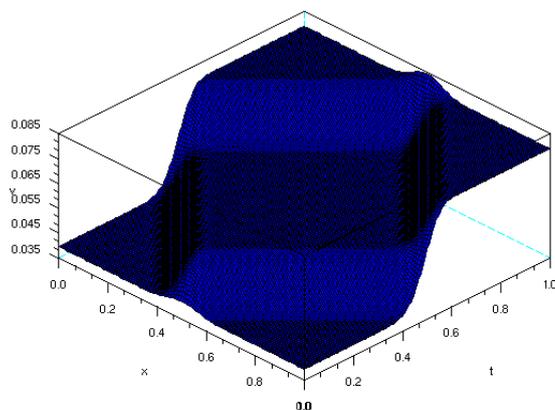


FIG. 4.17 - v_j^n

L'approximation de la vitesse de v , v_{ex} à l'instant final $t = 2T$, et de la vitesse de u à l'instant initial $t = 0$ (le terme source).

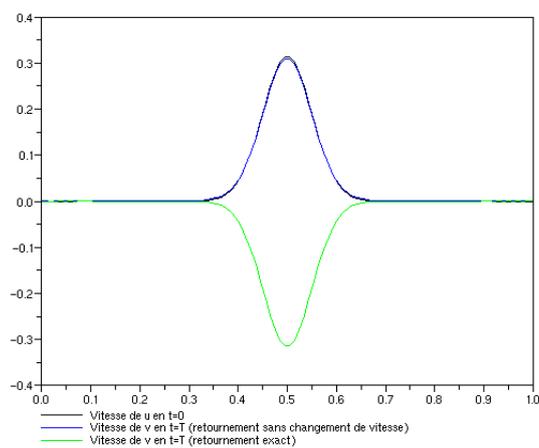


FIG. 4.18 - $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(2T, x)$, et $\frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(2T, x)$

Le cas : $\alpha = 0.5$, $N = 100$, $T = 1.7$, $\sigma = 0.05$, $g(t, x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{t^2 + (x - \frac{1}{4})^2}{2\sigma^2}}$
 L'approximation de la vitesse de v , v_{ex} à l'instant final $t = 2T$, et de la vitesse de u à l'instant initial $t = 0$ (le terme source).

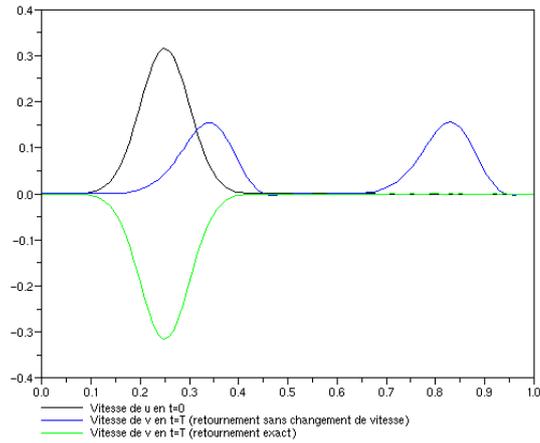


FIG. 4.19 - $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(2T, x)$, et $\frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(2T, x)$

Le cas : $\alpha = 0.5$, $N = 100$, $T = 10.5$, $\sigma = 0.05$, $g(t, x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{t^2 + (x - \frac{1}{4})^2}{2\sigma^2}}$
 L'approximation de la vitesse de v , v_{ex} à l'instant final $t = 2T$, et de la vitesse de u à l'instant initial $t = 0$ (le terme source).

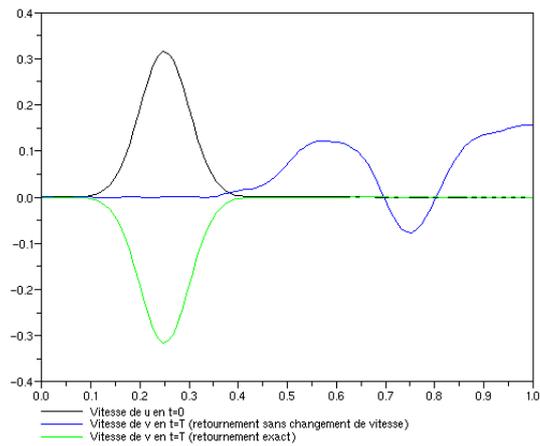


FIG. 4.20 - $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(2T, x)$, et $\frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(2T, x)$

4.2.2 Problème direct avec la condition d'impédance

Le cas : $\alpha = 0.5$, $N = 100$, $T = 1$, $z = 0.5$, $\sigma = 0.05$, $g(t, x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{t^2 + (x - \frac{1}{2})^2}{2\sigma^2}}$

Problème direct

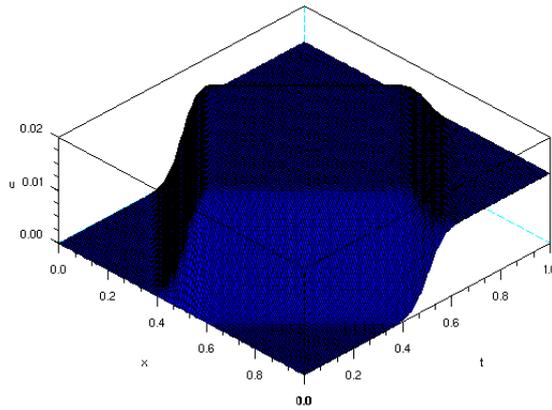


FIG. 4.21 - u_j^n

Problème retourné exact

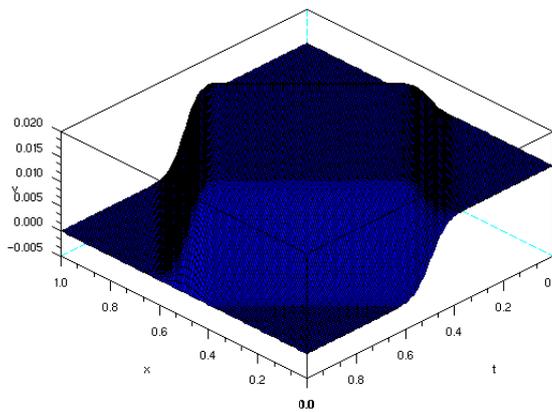


FIG. 4.22 - v_j^n

Problème retourné sans changement de vitesse

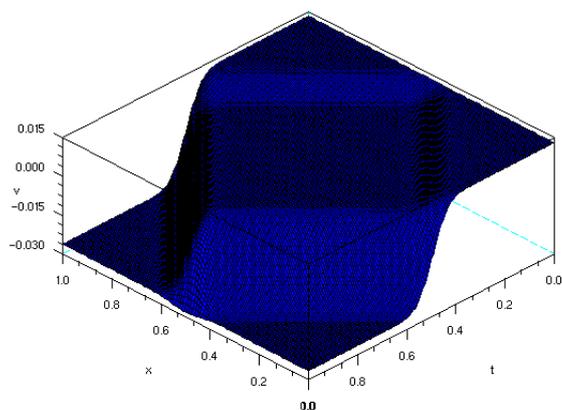


FIG. 4.23 – v_j^n

L'approximation de la vitesse de v , v_{ex} à l'instant final $t = 2T$, et de la vitesse de u à l'instant initial $t = 0$ (le terme source).

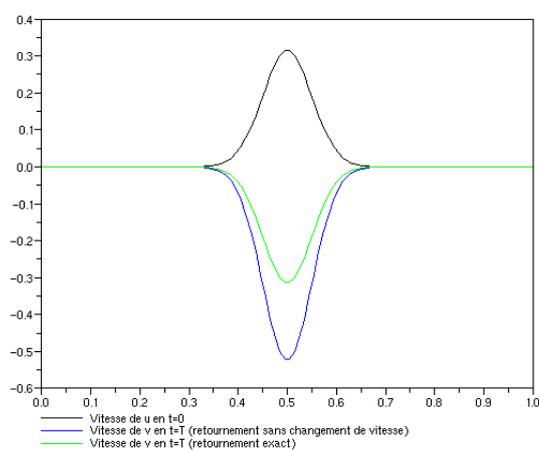


FIG. 4.24 – $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(2T, x)$, et $\frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(2T, x)$

Le cas : $\alpha = 0.5$, $N = 100$, $T = 1.7$, $z = 0.5$, $\sigma = 0.05$, $g(t, x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{t^2 + (x - \frac{1}{4})^2}{2\sigma^2}}$
 L'approximation de la vitesse de v , v_{ex} à l'instant final $t = 2T$, et de la vitesse de u à l'instant initial $t = 0$ (le terme source).

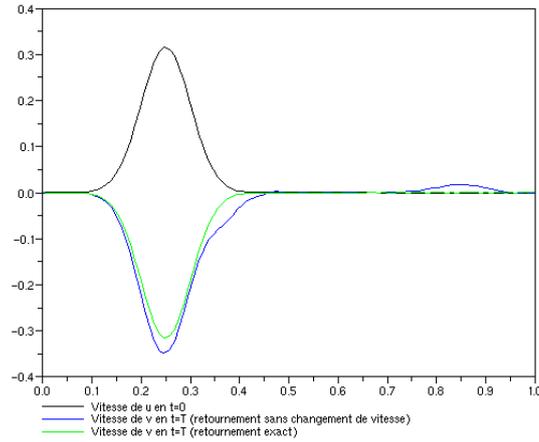


FIG. 4.25 – $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(2T, x)$, et $\frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(2T, x)$

Le cas : $\alpha = 0.5$, $N = 100$, $T = 10.5$, $z = 0.5$, $\sigma = 0.05$, $g(t, x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{t^2 + (x - \frac{1}{4})^2}{2\sigma^2}}$
 L'approximation de la vitesse de v , v_{ex} à l'instant final $t = 2T$, et de la vitesse de u à l'instant initial $t = 0$ (le terme source).

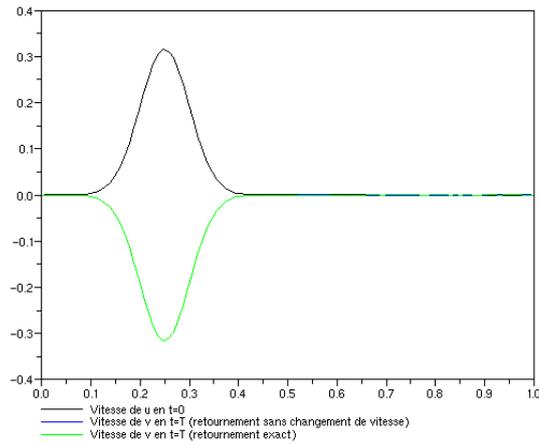


FIG. 4.26 – $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(2T, x)$, et $\frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(2T, x)$

Chapitre 5

Conclusion

D'après les résultats ci-dessus, on peut bien retrouver l'approximation et la localisation du terme source que l'on a mis dans le problème direct, en utilisant la méthode de retournement temporel.

Le cas T est entier(petit) : Pour le problème direct avec la condition de Dirichlet ou de Neumann, d'après **FIG. 4.4** et **FIG. 4.18**, on a la bonne approximation et la bonne localisation du terme source ($\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) \approx \frac{\partial v}{\partial t}(2T, x)$) qui vérifie le **Théorème 3.4** ou le **Théorème 3.10**. Pour le problème direct avec la condition d'impédance, on trouve bien la localisation du terme source, mais on n'a pas la bonne approximation de celui-ci (**FIG. 4.12** et **FIG. 4.24**) car T est petit (**Théorème 3.6** ou **Théorème 3.12**).

Le cas T n'est pas entier(petit) : On trouve toujours la localisation du terme source, en utilisant le retournement temporel pour le problème direct avec la condition d'impédance (**FIG. 4.13** et **FIG. 4.25**). Mais on ne trouve plus ce résultat pour le problème direct avec la condition de Dirichlet ou de Neumann (**FIG. 4.5** et **FIG. 4.19**).

Le cas T est plus grand ou $T \rightarrow +\infty$: D'après **FIG. 4.6** et **FIG. 4.20**, le retournement temporel pour le problème direct avec la condition de Dirichlet ou de Neumann, ne donne ni la localisation, ni l'approximation du terme source. Au contraire, on trouve que le retournement temporel pour le problème direct avec la condition d'impédance donne la bonne localisation et la bonne approximation du terme source (**FIG. 4.14** et **FIG. 4.26**), qui vérifie le **Théorème 3.6** ou le **Théorème 3.12**, c'ad $\frac{\partial v}{\partial t}(2T, x) \approx \frac{\partial v_{ex}}{\partial t}(2T, x)$. Dans ce cas, on trouve le terme source mais avec le signe opposé.

Donc, pour le problème direct avec la condition d'impédance et quand le temps T est plus grand ou tend vers l'infini, le retournement temporel avec la condition de Dirichlet est identique à celui avec la condition de Neumann (**FIG. 4.14** et **FIG. 4.26**), et nous donne la bonne approximation et la bonne localisation du terme source.

Bibliographie

- [1] C. BARDOS et M.FINK, *Mathematical foundations of the time reversal mirror*, Asymptotic Analysis, 29 (2002) 157-182
- [2] Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Signal_processing
- [3] Mathieu CANET, Antoine JARRIER et François-Joseph MYTYCH, *Time reversal of wave propagation in one dimension*, janvier 2008.
<http://math1.unice.fr/~junca/pdffiles/ProjetEPU2008.pdf>
- [4] Lionel SAINSAULIEU, *Calcul scientifique*, Dunod, Paris, 2000

Annexe

Problème direct avec la condition de Dirichlet

```
// Solution d'équation des cordes vibrantes
// avec la condition de Dirichlet
// g: Fonction de 2 variables(t,x)
// alpha: Rapport de delta_t sur delta_x
// N: Nombre de points intérieur ]0,1[
// T: Nombre de temps
// u: solution
// x: intervalle d'espace
// t: intervalle de temps
function [u,x,t]=sol_dir_dirichlet(g,alpha,N,T)
    delta_x=1/(N+1);delta_t=alpha*delta_x;beta=alpha^2;
    L=int(T/delta_t);
    x=0:delta_x:1;
    t=0:delta_t:T;
    mat=zeros(N+2,L+1)
    // Valeur de u=0 en t=0, en x=0 et en x=1
    // Valeur de u en t=t1
    for j=2:(N+1)
        mat(j,2)=delta_t^2*g(0,(j-1)*delta_x);
    end
    // Valeur de u pour t>t1
    for col=3:(L+1)
        for j=2:(N+1)
            mat(j,col)=beta*mat(j+1,col-1)+2*(1-beta)*mat(j,col-1)
            +beta*mat(j-1,col-1)-mat(j,col-2);
        end
    end
    u=mat;
endfunction
```

Problème direct avec la condition de Neumann

```
// Solution d'équation des cordes vibrantes
// avec la condition de Neumann
// g: Fonction de 2 variables (t,x)
// alpha: Rapport de delta_t sur delta_x
// N: Nombre de points intérieur ]0,1[
// T: Nombre de temps
// u: solution
// x: intervalle d'espace
// t: intervalle de temps
function [u,x,t]=sol_dir_neumann(g,alpha,N,T)
    delta_x=1/(N+1);
    delta_t=alpha*delta_x;
    betta=alpha^2;
    L=int(T/delta_t);
    x=0:delta_x:1;
    t=0:delta_t:T;
    mat=zeros(N+2,L+1)
    // Valeur u=0 en t=0
    // Valeur de u en t=t1, u=0 en x=0 et x=1
    for j=2:(N+1)
        mat(j,2)=delta_t^2*g(0,(j-1)*delta_x);
    end
    // Condition aux limites
    mat(1,2)=mat(2,2); // en x=0
    mat(N+2,2)=mat(N+1,2); // en x=1
    // Valeur de u pour t>t1
    for col=3:(L+1)
        for j=2:(N+1)
            mat(j,col)=betta*mat(j+1,col-1)+2*(1-betta)*mat(j,col-1)
            +betta*mat(j-1,col-1)-mat(j,col-2);
        end
        // Conditions aux limites
        mat(1,col)=mat(2,col); // en x=0
        mat(N+2,col)=mat(N+1,col); // en x=1
    end
    u=mat;
endfunction
```

Problème direct avec la condition d'impédance

```
// Solution d'équation des cordes vibrantes
// avec la condition d'impédance
// g: Fonction de 2 variables (t,x)
// z: Coefficient d'impédance
// alpha: Rapport de delta_t sur delta_x
// N: Nombre de points intérieur ]0,1[
// T: Nombre de temps
// u: solution
// x: intervalle d'espace
// t: intervalle de temps
function [u,x,t]=sol_dir_impedance(g,z,alpha,N,T)
    delta_x=1/(N+1); delta_t=alpha*delta_x;
    betta=alpha^2;
    L=int(T/delta_t);
    x=0:delta_x:1;
    t=0:delta_t:T;
    mat=zeros(N+2,L+1)
    // Valeur u=0 en t=0
    // Valeur de u en t=t1
    for j=2:(N+1)
        mat(j,2)=delta_t^2*g(0,(j-1)*delta_x);
    end
    // Valeur de u pour t>t1
    for col=3:(L+1)
        for j=2:(N+1)
            mat(j,col)=betta*mat(j+1,col-1)+2*(1-betta)*mat(j,col-1)
                +betta*mat(j-1,col-1)-mat(j,col-2);
        end
        // Conditions aux limites
        // en x=0
        mat(1,col)=alpha*z*(mat(2,col-1)-mat(1,col-1))+mat(1,col-1);
        // en x=1
        mat(N+2,col)=alpha*z*(mat(N+1,col-1)-mat(N+2,col-1))
            +mat(N+2,col-1);
    end
    u=mat;
endfunction
```

Problème retourné exact avec la condition de Dirichlet

```
// Solution retournée exacte avec
// la condition Dirichlet
// u: Matrice de la solution directe
// alpha: le rapport de delta_t sur delta_x
function v=sol_ret_dirichlet_ex(u,alpha)
    [N,L]=size(u);
    betta=alpha^2;
    mat=zeros(N,L); // Initialiser une matrice
    // v(0,x)=u(T,x), valeur de v en t0
    mat(:,1)=u(:,L);
    // dv(0,x)=-du(T,x), valeur de v en t1
    mat(:,2)=u(:,L-1);
    // Valeur de v pour t>t1
    for col=3:L
        for j=2:(N-1)
            mat(j,col)=betta*(mat(j+1,col-1)+mat(j-1,col-1))
                +2*(1-betta)*mat(j,col-1)-mat(j,col-2);
        end
        // Conditions aux limites
        // Condition en x=0
        mat(1,col)=u(1,L-col+1);
        // Condition en x=1
        mat(N,col)=u(N,L-col+1);
    end
    v=mat;
endfunction
```

Problème retourné exact avec la condition de Neumann

```
// Solution retournée exacte avec
// la condition Neumann
// u: Matrice de la solution directe
// alpha: le rapport de delta_t sur delta_x
function v=sol_ret_neumann_ex(u, alpha)
    [N,L]=size(u);
    betta=alpha^2
    mat=zeros(N,L); // Initialiser une matrice
    // v(0,x)=u(T,x), valeur de v en t0
    mat(:,1)=u(:,L);
    // dv(0,x)=-du(T,x), valeur de v en t1
    mat(:,2)=u(:,L-1);
    // Conditions aux limites
    // Condition en x=0
    mat(1,2)=mat(2,2)-u(2,L-1)+u(1,L-1);
    // Condition en x=1
    mat(N,2)=mat(N-1,2)-u(N-1,L-1)+u(N,L-1);
    // Valeur de v pour t>t1
    for col=3:L
        for j=2:(N-1)
            mat(j,col)=betta*(mat(j+1,col-1)+mat(j-1,col-1))
                +2*(1-betta)*mat(j,col-1)-mat(j,col-2);
        end
        // Conditions aux limites
        // Condition en x=0
        mat(1,col)=mat(2,col)-u(2,L-col+1)+u(1,L-col+1);
        // Condition en x=1
        mat(N,col)=mat(N-1,col)-u(N-1,L-col+1)+u(N,L-col+1);
    end
    v=mat;
endfunction
```

Problème retourné avec la condition de Dirichlet

```
// Solution retournée sans changement de vitesse avec
// la condition Dirichlet
// u: Matrice de la solution directe
// alpha: le rapport de delta_t sur delta_x
function v=sol_ret_dirichlet(u, alpha)
    [N,L]=size(u);
    betta=alpha^2;
    mat=zeros(N,L); // Initialiser une matrice
    // v(0,x)=u(T,x), valeur de v en t0
    mat(:,1)=u(:,L);
    // dv(0,x)=du(T,x)
    for j=2:(N-1)
        // valeur de v en t1
        mat(j,2)=2*u(j,L)-u(j,L-1);
    end
    // Conditions aux limites
    // Condition en x=0
    mat(1,2)=u(1,L-1);
    // Condition en x=1
    mat(N,2)=u(N,L-1);
    // Valeur de v pour t>t1
    for col=3:L
        for j=2:(N-1)
            mat(j,col)=betta*(mat(j+1,col-1)+mat(j-1,col-1))
            +2*(1-betta)*mat(j,col-1)-mat(j,col-2);
        end
        // Conditions aux limites
        // Condition en x=0
        mat(1,col)=u(1,L-col+1);
        // Condition en x=1
        mat(N,col)=u(N,L-col+1);
    end
    v=mat;
endfunction
```

Problème retourné avec la condition de Neumann

```
// Solution retournée sans changement de vitesse avec
// la condition Neumann
// u: Une matrice de la solution directe
// alpha: le rapport de delta_t sur delta_x
function v=sol_ret_neumann(u,alpha)
    [N,L]=size(u);
    betta=alpha^2;
    mat=zeros(N,L); // Initialiser une matrice
    mat(:,1)=u(:,L); // v(0,x)=u(T,x)
    // dv(0,x)=du(T,x)
    for j=2:(N-1)
        mat(j,2)=2*u(j,L)-u(j,L-1); // valeur de v en t1
    end
    // Conditions aux limites
    // Condition en x=0
    mat(1,2)=mat(2,2)-u(2,L-1)+u(1,L-1);
    // Condition en x=1
    mat(N,2)=mat(N-1,2)-u(N-1,L-1)+u(N,L-1);
    // Valeur de v pour t>t1
    for col=3:L
        for j=2:(N-1)
            mat(j,col)=betta*(mat(j+1,col-1)+mat(j-1,col-1))
                +2*(1-betta)*mat(j,col-1)-mat(j,col-2);
        end
        // Conditions aux limites
        // Condition en x=0
        mat(1,col)=mat(2,col)-u(2,L-col+1)+u(1,L-col+1);
        // Condition en x=1
        mat(N,col)=mat(N-1,col)-u(N-1,L-col+1)+u(N,L-col+1);
    end
    v=mat;
endfunction
```