Projet CIME: Classement, Informatique Mathématiques et Elo

Rapport de Stage

Sancho DOS SANTOS

Encadré par M. Stéphane Junca

Mathématiques appliquées et modélisation
4^{me} *année*
Polytech'Nice Sophia

Mardi 17 Septembre 2010

Université Nice SOPHIA ANTIPOLIS

POLYTECH NICE-SOPHIA

Résumé

Dans de nombreux jeux ou sports, il nous arrive de vouloir comparer les capacités de deux joueurs, afin de savoir lequel a le plus de chances de gagner la partie. C'est ainsi que plusieurs théories de classement sont apparues, visant à donner des classements aux joueurs, qui lorsque comparés, font apparaître un favori. Parmi les classements les plus connus, nous avons le classement ATP au tennis, ou encore le classement FIFA pour le football.

Le problème du classement de deux joueurs rentre dans le domaine statistique de la "comparaison par paires". Lorsque deux joueurs s'affrontent nous cherchons à savoir non seulement qui est le favori, mais aussi quelles sont les chances de succès de ce dernier.

Dans ce rapport, nous allons nous intéresser au système de Classement Elo, qui est une méthode de calcul de la force relative de deux joueurs. Ce système fut inventé dans les années 1960 par le physicien et joueur d'échecs Américain Arpad Elo, et est utilisé actuellement dans de nombreux jeux et sports tels le jeu d'échecs, le jeu de Go, ainsi que dans le baseball et football américain universitaires.

Nous verrons dans la suite les principes de base de ce système de classement, et utiliserons les outils informatiques et mathématiques afin de simuler et prouver mathématiquement certaines propriétés clés de ce système.

Table des matières

1 Introduction

Etant un fort joueur d'échecs de niveau international, le physicien américain Arpad Elo décida d'inventer un meilleur système pour classer les joueurs d'échecs que celui utilisé à son époque. Le système qu'il proposa était basé sur des estimations statistiques. Il proposa de donner à tout joueur un classement (appelé aussi parfois «rating»), un chiffre généralement compris entre 1000 pour les débutants et 2800 pour les meilleurs joueurs du monde, et de réajuster ce chiffre à la hausse ou à la baisse à l'issue de chaque partie, en fonction du résultat du joueur. Mais la force d'un joueur ne se résume pas à son classement, selon l'état physique/psychologique du joueur, il peut jouer certaines parties tantôt au dessus, tantôt en dessous de son niveau.

Ainsi Elo jugea que la force E d'un joueur était en réalité une variable aléatoire normale, centrée en son classement μ, et d'écart-type $\sigma = 200$ pour tous les joueurs. Elo proposa une échelle de telle sorte qu'une différence de 200 points entre deux joueurs signifierait une probabilité de 75% de victoire pour le plus fort des deux (100 points représente une probabilité de 64%). Ainsi par exemple, selon une propriété bien connu des courbes de Gauss, un joueur possédant un classement de 1500 jouera 68% de ses parties à un niveau compris entre 1300 et 1700.

Lorsqu'un joueur i de force E_i affronte un joueur j de force E_j, E_i et E_j sont considérées comme des variables aléatoires indépendantes, et i gagne si $E_i > E_j$, et reciproquement j gagne si $E_j > E_i$. Ainsi, pour deux joueurs qui ne se sont jamais rencontrés, on peut prédire la probabilité que le premier joueur gagne la rencontre : Etant donné que la différence de deux lois normales est une loi normale, i bat j si $\tilde{E} = E_i - E_j > 0$.

Lorsqu'un joueur i bat un joueur j, son classement est vu à la hausse de façon proportionnelle à la différence des classements (très peu d'augmentation si le joueur 1 était très favori, une grande augmentation s'il était grand outsider), et de même, le classement de son adversaire est revu à la baisse. On peut supposer dans un premier temps qu'il y a conservation de la masse totale des points Elo, c'est à dire, le joueur i gagne exactement le même nombre de points que perd le joueur j.

Nous allons voir dans la suite comment et à quelle vitesse converge le classement d'un joueur vers sa vraie force, dans un premier temps dans un cas simple, où un joueur joue toujours contre le même adversaire. Ensuite nous introduirons un troisième joueur, ce qui va considérablement compliquer le problème, enfin nous aborderons le cas de N joueurs qui s'affrontent. Pour terminer, nous comparerons les différents types de tournois, afin de savoir lequel produit le classement le plus fiable.

2 Le cas de deux joueurs

Dans un premier temps, nous allons supposer que nous avons deux joueurs qui jouent toujours ensemble. On cherche à estimer la “vraie“ force ρ_i, $i = 1, 2$ de chaque joueur. Arpad Elo propose le schéma itératif suivant pour déterminer la force de chaque joueur : Pour leur classement initial, on part de valeurs ”estimées”, voire quelconques, r_i^0 et on applique le processus itératif suivant :

$$r_i^{n+1} = r_i^n + G_{ij}^n$$

Où r_i est la mesure de la force ou le “rating“ du joueur i et G_{ij} représente nombre de points gagnés par i contre j. L'hypothèse naturelle de conservation de la “masse” totale de points Elos donne :

$$m = r_1^{n+1} + r_2^{n+1} = r_1^n + r_2^n, \forall n$$

Cette hypothèse est équivalente à

$$G_{ij}^n + G_{ji}^n = 0$$

C'est a dire, un joueur gagne exactement le même nombre de points que perd son adversaire.

Soit s_{ij} le score du match de i avec j ($s_{ij}^n \in \{0, 1\}, s_{ij} = 1$ si i bat j, 0 sinon) et $s(r_i, r_j)$ le score (moyen) espéré en fonction du classement des joueurs. Arpad Elo propose que le gain soit proportionnel à l'écart entre le score obtenu et le score espéré. De plus, le score espéré ne dépend que de la différence des classements. On a ainsi le calcul de gain/perte du rating :

$$G_{ij}^n = K(s_{ij}^n - s(r_i^n - r_j^n))$$

Où K est un coefficient fixé à l'avance. On suppose que :

- $\lim_{x\to-\infty} s(x) = 0$
- $s(.)$ est croissante
- $\lim_{x\to+\infty} s(x) = 1$

Ceci est tout à fait cohérent si on raisonne en terme de forces : plus le joueur i est plus fort que le joueur j, i.e. plus $r_i - r_j$ est grand, et plus le score espéré est grand, etc. Les fonctions $s(.)$ admissibles pour ce modèle sont les fonctions de répartition.
De plus, la loi de conservation des masses implique que pour tout x, on ait :

$$s(x) + s(-x) = 1$$

Autrement dit, $s(x) = \frac{1}{2} + \phi(x)$, où $\phi(.)$ est une fonction impaire, croissante, telle que $\phi(\pm\infty) = \pm\frac{1}{2}$. Ainsi, $s(.)$ est donc la fonction de répartition d'une loi symétrique. Les fonction $s(.)$ que l'on va étudier sont :

- La loi normale $\mathcal{N}(\rho_i - \rho_j, 2\sigma^2)$, avec $\sigma = 200$.

- La loi logistique : $s(x) = \frac{1}{1+10^{-\frac{x}{400}}}$
- Le modèle linéaire : $s(x) = \frac{1}{2} + Lx$, $L > 0$

Faisons quelques remarques préliminaires :

- La fonction de répartition d'une loi normale fut le premier modèle utilisé par Arpad Elo. Comme nous l'avons remarqué dans l'introduction, si on modélise r_i par une variable aléatoire $R_i \sim \mathcal{N}(\rho_i, \sigma^2)$, que R_i et R_j sont indépendantes et que R_i l'emporte sur R_j lorsque $R_i > R_j$ alors on vérifie que $s(.)$ est bien la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(\rho_i - \rho_j, 2\sigma^2)$.
  En effet, cela se vérifie par exemple à l'aide des fonctions génératrices : Supposons que $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.
  $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = e^{it\mu_1 - \frac{\sigma_1^2 t}{2}}$ $\quad \varphi_Y(t) = \mathbb{E}(e^{itY}) = e^{it\mu_2 - \frac{\sigma_2^2 t}{2}}$
  $\varphi_{X-Y}(t) = e^{it(\mu_1-\mu_2)} e^{\frac{-t}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}$ $\quad \Rightarrow X - Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 - \sigma_2^2)$

- Le paramètre de la loi logistique a été ajusté pour coller au modèle de la loi normale. Il y a une justification théorique que l'on verra pour $N = 3$.

- Enfin, le modèle linéaire n'est pas issu d'une fonction de répartition. On peut le corriger en prenant $s(x) = 1$ pour $x > \frac{1}{2L}$, $s(x) = 0$ pour $x < \frac{1}{2L}$. Ainsi, $s(.)$ devient la fonction de répartition de la loi uniforme $\mathcal{U}(] - \frac{1}{2L}, \frac{1}{2L}[)$.
  Si les écarts de force sont inférieurs à $\frac{1}{2L}$, on peut utiliser ce modèle linéaire.

2.1 Tests informatiques et mathématiques pour $N = 2$

Dans cette partie, nous allons réaliser quelques simulations informatiques et preuves mathématiques concernant le classement de deux joueurs qui jouent ensemble un grand nombre de parties.

2.1.1 Le cas déterministe

Supposons que le joueur 1 gagne toujours contre le joueur 2. Est-ce que son classement va augmenter infiniment, ou va-t-il attendre un certain "seuil" qu'il ne pourra dépasser ?

Si la fonction $s(.)$ considérée est strictement croissante, comme c'est le cas pour les modèles loi normale et loi logistique, alors $\lim_{n\to+\infty} r_1^n = +\infty$. En effet, on a

$$r_1^{n+1} = r_1^n + K(1 - s(\Delta r^n)) \geq r_1^n$$

Et donc la suite (r_1^n) tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini.

Sur le graphique suivant, nous observons l'évolution du rating du joueur 1, qui possède au départ un rating de 1600 Elos, et qui joue 2000 parties contre un adversaire possedant un rating de 1500 Elos. Nous observons bien la croissance vers l'infini prédite mathématiquement.

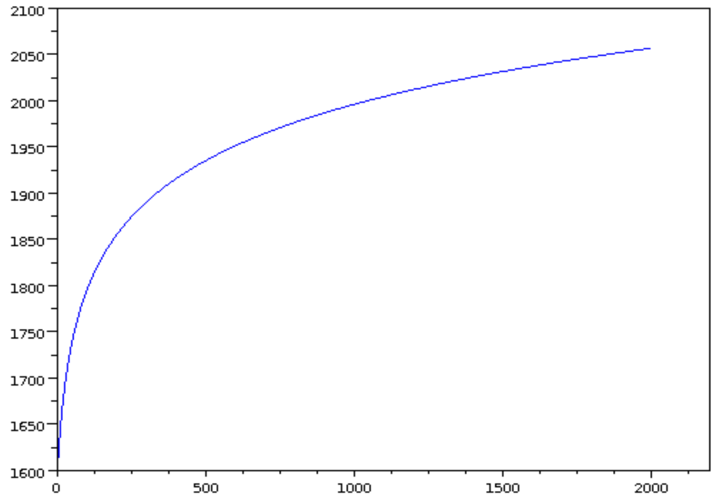

FIGURE 1 – Evolution du classement d'un joueur dans le cas déterministe lorsque s(.) est strictement croissante.

Supposons désormais que la fonction $s'(.)$ soit à support compact, comme c'est le cas dans le modèle linéaire. Alors à partir d'un certain rang $s(x) = 1$ et donc $r_1^{n+1} = r_1^n$. Nous pouvons ainsi prédire que r_i^n converge, et que sa limite ne dépend que de la différence des ratings initiaux $r_1^0 - r_2^0$. Avec une simulation informatique, nous obtenons :

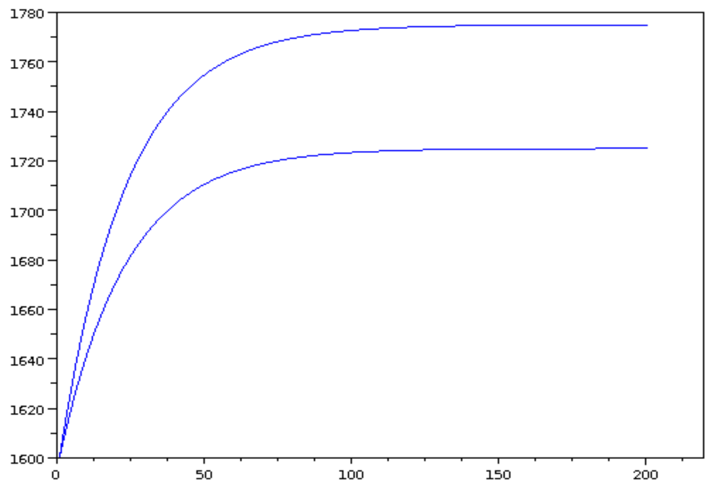

FIGURE 2 – Evolution du classement d'un joueur dans le cas déterministe pour le modèle linéaire

Sur le graphique précédent, nous observons l'évolution du rating du joueur 1 sur 200 parties contre un adversaire qui possède également un rating de 1600 Elos, et puis contre un joueur qui possède un rating de 1500 Elos.

On observe qu'à partir d'un certain stade, le rating du jouer 1 ne dépasse plus un certain seuil. Ces tests informatiques sont en accord avec nos prévisions mathématiques.

2.1.2 Le cas de Bernoulli

Reprenons le même scénario que précédemment : deux joueurs jouent toujours ensemble. Toutefois, cette fois-ci, le résultat de la partie n'est plus déterministe : le joueur 1, possédant un rating initial estimé r_1^0 joue toujours contre le joueur 2, mais cette fois-ci il a une probabilité $p \in]0, 1[$ fixe de gagner la partie. On applique le même processus itératif que précédemment afin de converger vers la "vraie" force du joueur 1 :

$$r_1^{n+1} = r_1^n + K(s_{12}^n - s(r_1^n - r_2^n))$$

où (s_{12}) est une suite de variables aléatoires de Bernoulli, où le n^{me} terme represente le score de la n^{me} partie entre le joueur 1 et le joueur 2, K est un coefficient constant et $s(x)$ une fonction de répartition. On pose

$$R^n = \begin{pmatrix} r_1^n \\ r_2^n \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad R^{n+1} = F(s_{12}^n, R^n)$$

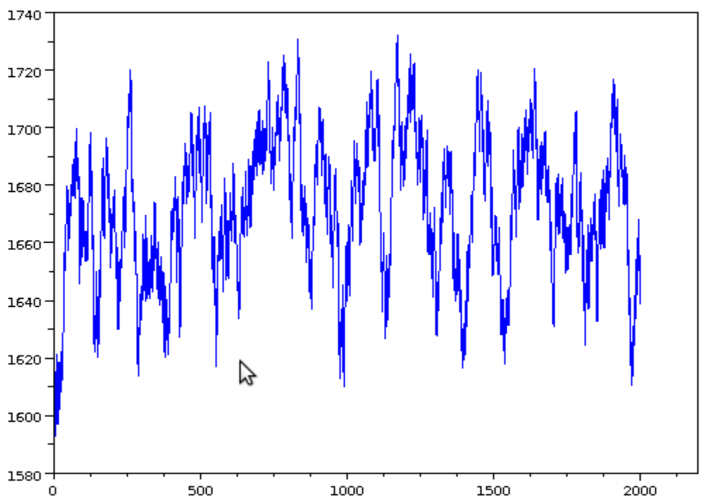

FIGURE 3 – Evolution du classement d'un joueur dans le cas de Bernoulli

On observe une stabilité, modulo une fluctuation autour d'une valeur moyenne ρ_i, du rating r_1^n lorsque n tend vers l'infini. Cherchons à quoi cela correspond mathématiquement.

Notons Δ^n la suite des différences de ratings à l'instant n, i.e. $\Delta^n = r_1^n - r_2^n$. On a :

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1} &= r_1^{n+1} - r_2^{n+1} = r_1^n + K(s_{12} - s(\Delta^n)) - r_2^n - K(s_{21} - s(\Delta^n)) \\
&= \Delta^n + K(s_{12} - (1 - s_{12}) - s(\Delta^n) + (1 - s(\Delta^n))) \\
&= \Delta^n + 2K(s_{12} - s(\Delta^n)) \\
&\quad \text{avec } s(x) = \frac{1}{2} + Lx, \text{ cela donne :} \\
\Delta^{n+1} &= (1 - 2KL)\Delta^n + 2K(s_{12} - \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

Nous avons là une suite arithmético-géométrique. Il est clair que celle-ci converge lorsque $|1-2KL| < 1$. En outre, on remarque qu'elle converge d'autant plus vite que le facteur K est élevé. En pratique, le facteur L utilisé est très petit, de l'ordre de $\frac{1}{400}$, et K vaut en général 10 ou 15, et ainsi $2KL$ est très petit. Le facteur K optimal pour la vitesse de convergence serait $K = \frac{1}{2L}$.

Dans la pratique, le classement des joueurs n'est pas mis a jour immédiatement après chaque partie, mais au bout d'une période fixée. Voyons maintenant quel est l'effet sur le classement de cette mise à jour périodique.

2.1.3 Mise à jour périodique du Elo

On se donne un entier positif n_0 et on remet à jour les ratings seulement toutes les n_0 parties. r_i^n n'est ainsi évalué que pour les n multiples de n_0. L'algorithme de calcul itératif du rating devient :

$$r_i^{(k+1)n_0} = r_i^{kn_0} + \sum_{n=kn_0}^{(k+1)n_0-1} G_{ij}^n,$$

$$r_i^{kn_0+l} = r_i^{kn_0} \qquad \forall l = 0, 1, \ldots, n_0 - 1.$$

Etudions et testons l'effet de la période n_0 dans les cas traités précédemment. Une simulation nous donne le graphique suivant :

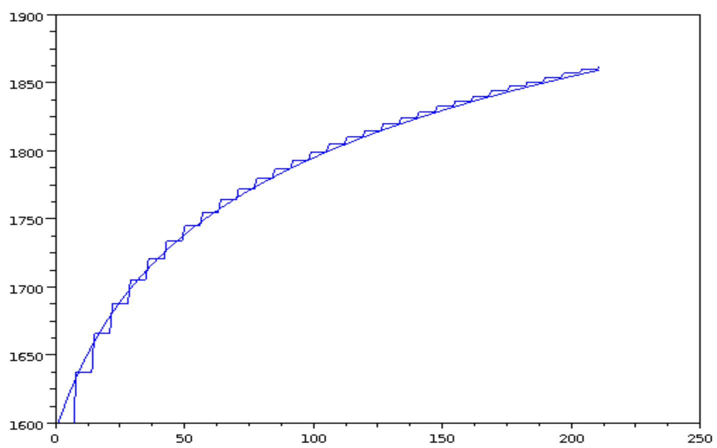

FIGURE 4 – Comparaison de la mise à jour périodique et de la mise à jour après chaque partie dans le cas déterministe

En ligne continue nous avons la mise à jour du classement après chaque partie, tandis qu'en escalier nous avons la mise à jour périodique du classement d'un joueur possedant au départ 1600 points Elo et qui joue (et gagne) toujours contre un adversaire possedant lui aussi au départ un classement de 1600 points Elo.

Le graphique ci-dessus nous laisse conjecturer que la mise a jour périodique du Elo n'accélère pas la vitesse de convergence du classement, étant donné que pour un même nombre de parties, les classements coincident qu'ils soient mis à jour immédiatement après chaque partie ou périodiquement. Le calcul explicite dans le cas déterministe montre que la mise à jour périodique n'augmente pas la vitesse de convergence.

Comparons maintenant la mise à jour du Elo après chaque partie à la mise à jour périodique dans le cas de Bernoulli

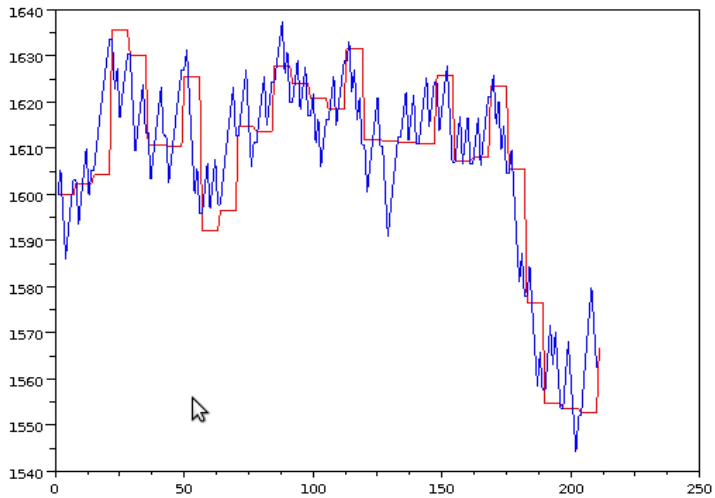

FIGURE 5 – Comparaison de la mise à jour périodique et de la mise à jour après chaque partie dans le cas de Bernoulli

Un jour classé 1600 joue contre un joueur classé 1500. Le graphique en bleu represente la mise à jour du Elo apres chaque partie, tandis que le graphique en rouge represente la mise à jour périodique. On observe que cette mise à jour périodique a tendance à “lisser“ les fluctuations.

3 Le cas $N = 3$

Supposons que l'on ait désormais trois joueurs qui s'affrontent. La première question naturelle qui nous vient est celle de la transitivité : si A bat B et que B bat C, est-ce que A battra nécessairement C, et quelles sont ses chances de succès ?

3.1 Transitivité et Loi logistique

Pour parler de transitivité, on peut introduire la notion de “force“, analogue à la force physique. Si deux joueurs ont disputé entre eux un nombre de parties significatif, on peut facilement déterminer la notion de force relative entre ces deux joueurs.

La question naturelle qui se pose est la suivante : connaissant la probabilité de gain d'un joueur A contre un joueur B, ainsi que celle du joueur B contre le joueur C, quelle est la probabilité de gain du joueur A contre le joueur C ?
Introduisons la notion de ”force de A contre B“. Supposons qu'un joueur A joue un nombre N très grand de parties contre B (mathématiquement, $N = +\infty$). On note N_A le nombre de parties gagnées par le joueur A, et N_B le nombre de parties gagnées par B. Bien évidamment, $N_A + N_B = N$. On appelle la force de A contre B la quantité $f_{AB} = \frac{N_A}{N_B}$. On peut alors calculer la probabilité de gain de A contre B de la façon suivante : $P(A/B) = \frac{N_A}{N} = \frac{f_{AB}}{1+f_{AB}}$

Introduisons les notations suivantes :
$q = P(A/B)$ la probabilité de gain de A contre B
$r = P(B/C)$ la probabilité de gain de B contre C
$p = P(A/C)$ la probabilité de gain de A contre C est telle que :

$$\frac{p}{1-p} = \frac{q}{1-q} \times \frac{r}{1-r}$$

Le rapport entre la probabilité et son complément exprime la force relative f entre deux joueurs. Ceci est tout à fait cohérent si l'on raisonne en terme de forces : si A est deux fois plus fort que B (i.e. si q=0.66), et si B est trois fois plus fort que C, alors A est six fois plus fort que C.

La force de A contre C est donc égale au produit des forces intermédiaires, celle de A contre B par celle de B contre C :

$f(p) = f(q) \times f(r)$ avec $f(p) = \frac{p}{1-p}$ et de la force peut se déduire la probabilité : $p = \frac{f(p)}{1+f(p)}$

La force est multiplicative. Or, nous cherchons toutefois à avoir un classement additif, pour lequel l'écart mesuré entre A et C doit être égal à la somme des écarts mesurés entre A et B d'une part et B et C d'autre part, ce qui n'est pas le cas avec le produit des forces.

On cherche donc une fonction Δ telle que $\Delta(p) = \Delta(q) + \Delta(r)$
Posons $\Delta(p) = g[f(p)]$ où g est une fonction à définir.

$$\Delta(p) = \Delta(q) + \Delta(r) <=> g[f(p)] = g[f(q)] + g[f(r)]$$

$$f(p) = f(q) \times f(r) => g[f(q) \times f(r)] = g[f(q)] + g[f(r)]$$

Cette transformation par g d'un produit en somme est la définition de la fonction logarithme :

$$\Delta(p) = log[f(p)] = log[\frac{p}{1-p}]$$

Pour étendre la plage de valeurs, un facteur multiplicatif fixé à 400 est introduit.

On obtient la formule Elo :

$$\Delta(p) = 400 \times log(\frac{p}{1-p})$$

La fonction réciproque $p(D)$ donne la probabilité de gain en fonction de la différence Elo D :

$$log(\frac{p(D)}{1-p(D)}) = \frac{D}{400} <=> p(D) = \frac{1}{1+10^{\frac{-D}{400}}}$$

Cette fonction est comprise entre 0 et 1 et vaut 0.5 en $D = 0$.

Aux échecs par exemple, c'est cette fonction $p(d)$ qui est désormais utilisée dans le calcul des ratings des joueurs. Celle-ci a pris la place de la fonction de répartition d'une loi normale, utilisée dans le modèle proposé initialement par Arpad Elo.

4 Le modèle de Bernoulli pour N joueurs

Dans cette partie, nous nous situons désormais dans le cas où N joueurs s'affrontent au cours d'un tournoi dit «tournoi fermé», c'est à dire un tournoi où chaque participant jouera contre les $N-1$ autre participants. C'est le cas par exemple dans les championnats nationaux de plusieurs sports (football, basketball, etc).

Etant donné les ratings initiaux, nous allons chercher à calculer le rating limite à l'issue de plusieurs tournois fermés.

Pour un joueur i donné, son classement à l'issue de $n+1$ tournois fermés sera donné par :

$$r_i^{n+1} = r_i^n + K\sum_{j\neq i}(s_{ij}^n - s(r_i^n - r_j^n))$$

Construisons le vecteur $R^n \in \mathbb{R}^n$ contenant le rating de tous les joueurs : pour k donné, $(R^n)_k$ représente le classement du joueur k après n tournois fermés. On cherche à savoir si le vecteur R^n converge en loi, et si oui quelle est sa limite.

Soit $S^n = (s_{ij}^n)_{ij}$, c'est à dire, une matrice où le terme (i,j) prend la valeur 0 ou 1 et représente le score de i contre j lors du n^{me} tournoi. On peut donc réécrire le système précédent sous la forme :

$$R^{n+1} = \mathcal{F}(R^n, S^n) \qquad \forall i = 1, \cdots, N$$

Considérons le modèle linéaire, où nous avons donc $s(x) = \frac{1}{2} + Lx$ avec $L > 0$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
r_i^{n+1} &= r_i^n + K\Gamma_i^n - KL\sum_{j\neq i}(r_i^n - r_j^n) \\
&\quad \text{avec } \Gamma_i^n = \sum_{j\neq i}(s_{ij}^n - \frac{1}{2}) \\
&= (1-(N-1)KL)r_i^n + KL\sum_{j\neq i} r_j^n + K\Gamma_i^n
\end{aligned}$$

Lorsque l'on considère l'ensemble des joueurs, on peut donc écrire le système matriciel qui en résulte : nous avons ainsi

$$\begin{aligned}
R^{n+1} &= ((1-NKL)Id + NKLB)R^n + K\Gamma^n \\
&\quad \text{avec } B = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \vdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Toutefois, ce qui nous intéresse est de savoir vers quoi converge le rating d'un joueur en moyenne, ainsi, nous allons en réalité considérer l'espérance de la quantité que nous venons de voir. Posons $\Lambda^n = E(r^n)$ Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\Lambda^{n+1} = E(r^{n+1}) &= ((1-NKL)Id + NKLB)E(r^n) + KE(\Gamma^n) \\ &= ((1-NKL)Id + NKLB)\Lambda^n + b\end{aligned}$$

où b ne dépend plus de n.

Nous avons là une suite arithmético-géométrique, dont on sait étudier la convergence. En effet, la convergence dépend des valeurs propres de la matrice $A = ((1-NKL)Id + NKLB)$. La matrice A est ce qu'on appelle une matrice d'appariements.

Nous savons que si le rayon spectral de la matrice

$$A = ((1-NKL)Id + NKLB)$$

est strictement inférieur à 1, alors la suite définie par

$$\Lambda^{n+1} = A\Lambda^n + b \tag{1}$$

converge et sa la limite est

$$L = (Id - A)^{-1}b$$

Le spectre se calcule ici explicitement : B est une matrice connue, ayant des propriétés particulières. En effet, $B^2 = B$, il s'agit de la matrice d'un projecteur. Ainsi, le spectre de A est $\{1$ avec multiplicité $1, 1 - NKL$ avec multiplicité $N-1\}$

Il se trouve que dans le cas que nous considérons, 1 est valeur propre (conservation de la masse) et nous ne pouvons à priori rien dire sur la convergence de la suite.

Considérons le vecteur suivant :

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

et soit de plus

$$F = \mathbb{1}^{\perp} = \{r_1 + r_2 + \cdots + r_N = 0\}$$

La conservation de la masse que nous avons mentionné auparavant nous donne

$$\mathbb{1}.R^{n+1} = \mathbb{1}.R^n = m$$

L'idée pour trouver la limite de la suite définie par (1) est la suivante : Nous allons utiliser le fait que $\mathbb{R}^n = \mathbb{1} \oplus F$ et nous allons donc décomposer $R^n \in \mathbb{R}^n$ de la façon suivante :

$$R^n = m\mathbb{1} + Y^n \qquad \text{avec } m = \mathbb{1}.R^n \text{ et } Y^n \in F$$

Ainsi, pour trouver la limite de la suite définie par (1) sur $\mathbb{R}^n$, il nous suffira d'ajouter la solution obtenue sur $\mathbb{1}$ à celle obtenue sur $F = \mathbb{1}^{\perp}$.

Sur $\mathbb{1}$, l'équation (1) est triviale : elle devient

$$m = m + 0$$

Considérons maintenant F l'orthogonal de $\mathbb{1}$, qui est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, restreint à F nous avons

$$Y^{n+1} = \tilde{\mathrm{A}} Y^n + b$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{A}} : F & \rightarrow F \\ X & \mapsto \Pi_F A X \end{aligned}$$

Or le rayon spectral de $\tilde{\mathrm{A}}$ est strictement inférieur à 1, et $\tilde{\mathrm{A}}$ est la matrice d'une application linéaire entre deux espaces de Banach de dimension finie, nous savons donc que :

$$(Id - \tilde{\mathrm{A}})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\mathrm{A}}^k$$

et donc

$$Y^n \rightarrow \tilde{\mathrm{L}} = (Id - \tilde{\mathrm{A}})^{-1} b$$

Ainsi, la limite de la suite définie par (1) est donc

$$\boxed{\mathrm{L} = \mathrm{m}\ \mathbb{1} + \tilde{\mathrm{L}}}$$

Ainsi, comme nous l'avons remarqué, le rating limite dépend du mode d'appariement. La question naturelle qui se pose alors est : quel est le meilleur type de rencontre pour classer des joueurs ? C'est à cette question que nous essayerons de répondre dans la section suivante.

5 Tournois

Dans cette section, nous allons comparer deux types de tournoi où l'on cherche à classer les personnes : le tournoi dit fermé contre le tournoi à élimination directe. Nous allons utiliser le Elo moyen limite du tournoi fermé comme Elo de référence pour le comparer aux autres types d'appariements. On peut classer les joueurs sans ratings à priorie : le gagnant est celui qui a le plus de gains à la fin du tournoi.

N joueurs s'affrontent deux par deux au cours d'un tournoi. On numérote les joueurs de 1 à N. On suppose que le joueur numéro 1 est plus fort que tous le autres, qui quand à eux sont supposés de même force. Le joueur numéro 1 a une probabilité $p \in]\frac{1}{2}, 1[$ de gagner à chaque rencontre.

Le but du problème est d'évaluer les chances du plus fort de gagner le tournoi. Pour cela, on étudie deux types de tournois : le tournoi par élimination directe et le tournoi dit fermé, où tous les joueurs s'affrontent.

On modélise cette situation par des variables aléatoires de Bernoulli R_{ij} définies pour tout $i < j$ de la manière suivante :

$$R_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si le joueur } i \text{ gagne contre le joueur } j \\ 0 \text{ si le joueur } i \text{ perd contre le joueur } j \end{cases}$$

Ainsi, on a toujours $R_{ji} = 1 - R_{ij}$ pour $i \neq j$. Remarquons que R_{ij} et R_{ji} ne sont pas indépendantes. De plus, R_{ii} n'est pas défini (le joueur ne joue pas contre lui-même).

5.1 Le tournoi par élimination directe

Cadre : nous avons au départ $N = 2^k$ joueurs. Le tournoi se déroule en k tours. A chaque tour du tournoi, les joueurs s'affrontent deux par deux. Les perdants sont éliminés du tournoi. Les gagnants jouent au tour suivant. Et on recommence au tour suivant avec les gagnants du tour précédent. Le vainqueur du tournoi est le seul joeuur qui n'est pas éliminé au bout de k tours. C'est le type de tournoi utilisé par exemple au tennis.

5.1.1 Exemple avec $N = 4$

Dans le cas ou $N = 4$, un vainqueur sera désigné au bout de $k = 2$ tours. A chaque tour, le joueur 1 a une probabilité p de gagner sa partie. Les résultats des parties sont indépendants les uns des autres. La probabilité que le joueur 1 gagne le tournoi est donc p^2.

Calculons quelle probabilité p on doit avoir au départ afin que le joueur 1 gagne le tournoi au moins une fois sur deux en moyenne :

On peut assimiler le fait que le joueur 1 gagne le tournoi à une loi de Bernoulli, de paramètre p^2. Mathématiquement, dire que ce joueur gagne le tournoi en moyenne au moins une fois sur deux, correspond à dire que l'éspérance de cette loi de Bernoulli est au moins $\frac{1}{2}$. Or nous savons que l'espérance d'une loi de Bernoulli de paramètre p^2 vaut son paramètre. Pour que le joueur 1 gagne le tournoi en moyenne au moins une fois sur deux, il nous faut donc avoir $p^2 \geq \frac{1}{2}$, c'est à dire, $p \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,71$

5.1.2 Cas général

Calculons d'abord le nombre de matchs disputés dans ce type de tournoi : Nous avons au départ $N = 2^K$ joueurs. Au premier tour, il y a donc $\frac{N}{2}$ matchs, soit en tout 2^{k-1} matchs. Le tour d'après, il y aura 2^{k-2} matchs, et ainsi de suite, jusqu'au k^{eme} tour, ou il y aura un seul match (la finale). Le nombre de matchs est donc la somme des k premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2. Il y a donc en tout $\frac{1-2^k}{1-2}$ matchs.

Lorsque $N = 2^k$ et qu'il y a donc k tours, la probabilité que le joueur 1 gagne le tournoi est $p^k, p \in]\frac{1}{2}, 1[$. Lorsque le nombre de joueurs tend vers l'infini, k tend aussi vers l'infini, et comme $p < 1$, p^k tend donc vers zéro. Ainsi, le joueur 1 a une probabilité de gagner le tournoi qui tend vers 0 lors que le nombre de joueurs augmente vers l'infini.

On se rend alors compte que dans le cas d'un tournoi à élimination directe, il y a plus de chances qu'un joueur autre que le favori remporte le tournoi.

Calculons maintenant le nombre de tours moyen joués par le joueur 1. Si la probabilité que le joueur 1 gagne contre un de ses adversaires est p, alors on peut modéliser le nombre de tours joués par le joueur 1 par une loi géométrique X de paramètre $1 - p$, où la probabilité que le joueur 1 joue k tours est

$$P(X = k) = p^{k-1}(1 - p)$$

. On cherche le nombre de tours moyens joués par le joueur 1, ce qui revient à calculer l'espérance de cette loi géométrique. Or nous savons que l'espérance d'une loi géométrique de paramètre $1 - p$ est $\frac{1}{1-p}$. Le joueur 1 joue donc en moyenne $\frac{1}{1-p}$ tours.

5.2 Tournoi fermé

Tous les joueurs se rencontrent deux par deux. Le gagnant est celui qui remporte le plus de matchs. Il peut y avoir plusieurs premiers.

On note $S_i = \sum_{j \neq i} R_{ij}$ l e nombre de matchs remportés par le joueur i. Ce type de tournoi est par exemple utilisé dans les championnats nationaux de plusieurs sports (football et basketball entre autres).

5.2.1 Exemple avec $N = 4$

Comme auparavant, calculons le nombre de matchs disputés dans ce genre de tournoi : A chaque tour il y a deux matchs, et pour 4 joueurs il y a trois tours. Il y a donc au final 6 matchs disputés en tout.

Nous allons maintenant chercher à calculer la probabilité que le joueur 1 gagne le tournoi. Lorsqu'il a trois adversaires, le joueur 1 peut gagner le tournoi s'il gagne toutes ses parties, ou s'il gagne deux de ses trois parties et que l'adversaire l'ayant battu a un score d'au plus deux points.

Calculons d'abord la probabilité que le joueur 1 gagne toutes ses parties :

$$P(S_1 = 3) = P(\{R_{12} = 1\} \cap \{R_{13} = 1\} \cap \{R_{14} = 1\}) = p^3$$

par indépendance des R_{ij}.

Calculons ensuite la probabilité que le joueur 1 s'incline seulement face au joueur 2, mais que le score final du joueur 2 soit d'au plus 2 points :

$$P((\{S_1 = 2\} \cap \{R_{12} = 0\}) \cap \{S_2 \leq 2\})) = P(\{S_1 = 2\} \cap \{R_{12} = 0\}) P(\{S_2 \leq 2\} | (\{S_1 = 2\} \cap \{R_{12} = 0\}))$$

$$\begin{cases} P(S_1 = 2 \cap R_{12} = 0) = p^2(1-p) \\ P(S_2 \leq 2 | (S_1 = 2 \cap R_{12} = 0)) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

D'ou $P((S_1 = 2 \cap R_{12} = 0) \cap S_2 \leq 2)) = \frac{3p^2(1-p)}{4}$. Il en est de même en ce qui concerne les joueurs 3 et 4. Ainsi, la probabilité que le joueur 1 gagne le tournoi est donc :

$$P(S_1 = 3) + 3P((S_1 = 2 \cap R_{12} = 0) \cap S_2 \leq 2)) = p^3 + \frac{9p^2(1-p)}{4} = \frac{-5p^3 + 9p^2}{4}$$

Cherchons désormais la plus petite probabilité p qui assure au joueur 1 de gagner le tournoi au moins une fois sur deux en moyenne :

$$\frac{-5p^3 + 9p^2}{4} = \frac{1}{2} \iff -5p^3 + 9p^2 - 2 = 0$$

Avec Maple, on trouve $p \simeq 0,58$.

5.2.2 Cas général

N joueurs participent au tournoi. Pour chaque tour il y a $\frac{N}{2}$, et chaque joueurs devant affronter tous ses adversaires, il y aura $N-1$ tours. Il y aura donc en tout $\frac{N(N-1)}{2}$ matchs.

Calculons le score moyen du joueur 1 pour ce type de tournoi. Le score du joueur 1 contre le joueur i peut être modélisé par une loi de Bernoulli de paramètre p. Le joueur 1 joue en tout $N-1$ matchs, et chaque match est une schéma de Bernoulli. Le score du joueur 1 au tournoi peut donc être modélisé par une variable Binomiale $\mathbb{B}(N-1, p)$. Nous savons que l'espérance de cette variable binomiale est $(N-1)p$. Ainsi le score moyen du joueur 1 est $\mathbb{E}(S_1) = (N-1)p$.

De même, le score moyen des autres joueurs S_i avec $i \neq 1$ peut être modélisé par une variable binomiale $\mathbb{B}(N-2, \frac{1}{2})$ pour ce qui concerne la confrontation avec les autre joueurs de même niveau. Ensuite, arrive la confrontation avec le joueur 1, ou le joueur i sort victorieux avec une probabilité $1-p$. Le score moyen espéré par le joueur i est donc $\frac{N-2}{2} + (1-p)$.

S_1 correspond en réalité à la somme de $N-1$ variables de Bernoulli de paramètre p, indépendantes et de même loi. D'après la loi faible des grands nombres nous savons que pour tout réel ϵ strictement positif, la probabilité que la moyenne empirique $(\frac{S_1}{N-1})$ s'éloigne de l'espérance (p) d'au moins ϵ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|\frac{S1}{N} - p| \geq \epsilon) = 0$$

5.3 Départages

Si on a des joueurs à égalité de points, il faudra les départager. Pour cela, on va calculer la quantité suivante, appelée le départage du joueur i

$$D_i = \sum_{j \neq i} R_{ij} S_j$$

Pour le départage du joueur i, on prend en compte la somme des points des adversaires contre lesquels i a gagné. Plus ce départage est important, et mieux le joueur i sera classé.

Calculons désormais en moyenne le départage du joueur 1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(D_1) &= \mathbb{E}(\sum_{j \neq 1} R_{1j} S_j) = \mathbb{E}(\sum_{j \neq 1} R_{1j} \sum_{k \neq j} R_{jk}) = \mathbb{E}(\sum_{j \neq 1} \sum_{k \neq j} R_{1j} R_{jk}) \\
&= \mathbb{E}(R_{1j} R_{j1} + \sum_{j \neq 1} \sum_{1 \neq k \neq j} R_{1j} R_{jk})
\end{aligned}$$

Or R_{1j} ne peut prendre que deux valeurs, zéro ou un. Si $R_{1j} = 0$ alors $R_{1j} R_{j1} = 0$. Si $R_{1j} = 1$ alors $R_{j1} = 0$ et le produit $R_{1j} R_{j1}$ est aussi nul. Dans tous les cas, $R_{1j} R_{j1} = 0$. On a donc au final

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(D_1) &= \mathbb{E}(\sum_{j \neq 1} \sum_{1 \neq k \neq j} R_{1j} R_{jk}) = \sum_{j \neq 1} \sum_{1 \neq k \neq j} \mathbb{E}(R_{1j} R_{jk}) \\
&= \frac{(N-1)(N-2)p}{2}
\end{aligned}$$

Calculons maintenant en moyenne le départage des autres joueurs.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(D_i) &= \mathbb{E}(\sum_{j \neq i} R_{ij} S_j) = \mathbb{E}(R_{i1} S_1 + \sum_{1 \neq j \neq i} R_{ij} S_j) \\
&= \mathbb{E}(R_{i1} S_1 + \sum_{1 \neq j \neq i} R_{ij} \sum_{k \neq j} R_{jk}) \qquad \forall i \neq j
\end{aligned}$$

Afin de calculer cette quantité, calculons d'abord $\mathbb{E}(R_{i1} S_1)$ en se rappellant comme vu précédement que $R_{i1} R_{1i} = 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R_{i1} S_1) &= \mathbb{E}(R_{i1} \sum_{k \neq 1} R_{1k}) = \mathbb{E}(R_{i1} \sum_{i \neq k \neq 1} R_{1k}) \\
&= (N-2)p(1-p)
\end{aligned}$$

Calculons maintenant $\mathbb{E}(\sum_{1 \neq j \neq i} R_{ij} \sum_{k \neq j} R_{jk})$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sum_{1 \neq j \neq i} R_{ij} \sum_{k \neq j} R_{jk}) &= \mathbb{E}(\sum_{1 \neq j \neq i} R_{ij} R_{j1} + \sum_{1 \neq j \neq i} R_{ij} \sum_{1 \neq k \neq j} R_{jk}) \\
&= \frac{(N-2)(1-p)}{2} + \mathbb{E}(\sum_{1 \neq j \neq i} R_{ij} \sum_{1 \neq k \neq j} R_{jk}) \\
&= \frac{(N-2)(1-p)}{2} + \frac{(N-2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve donc au final :

$$\mathbb{E}(D_i) = (N-2)p(1-p) + \frac{(N-2)(1-p)}{2} + \frac{(N-2)^2}{4}$$

6 Conclusion

A References

- **Glickman, Mark E.**, *A comprehensive guide to chess ratings*, American Chess Journal, University of Boston, 1995.
- **ELO Arpad**, *The rating of chessplayers, past and present*, ARCO, 1978.
- **Berman, David R. ; McLaurin, Sandra C. ; Smith, Douglas D.**, *Ranking whist players.* Discrete Math. 283 (2004), no. 1-3, 15–28.
- **Glickman, Mark E.**, *Dynamic paired comparison models with stochastic variances.* ,J. Appl. Stat. 28 (2001), no. 6, 673–689.
- **Brozos-Vázquez, Miguel(E-SACO-GT) ; Campo-Cabana, Marco Antonio(E-SACO-AM) ; Díaz-Ramos, José Carlos(IRL-CORK) ; González-Díaz, Julio(1-NW-D)**, *Ranking participants in tournaments by means of rating functions. (English summary)*, J. Math. Econom. 44 (2008), no. 11, 1246–1256.
- **Glickman, Mark E.**, *Parameter estimation in large dynamic paired comparison experiments.*,J. Appl. Stat. 1999, 48, 377–394.