Séries de Fourier

Notations : C_P^k les fonctions de $C^k(\mathbb{R},\mathbb{C})$ $P-$périodiques et $\widetilde{C}_P^k$ les fonctions C^k par morceaux et $P-$périodiques,

Si $f \in L^2(]0,P[,\mathbb{C})$, $c_n[f] := \frac{1}{P}\int_0^P f(t)\exp(-in\omega t)dt$, $n \in \mathbb{Z}$, avec $\omega = \frac{2\pi}{P}$,

Si $f \in L^2(]0,P[,\mathbb{R})$, $a_n[f] := \frac{2}{P}\int_0^P f(t)\cos(n\omega t)dt, \quad n \geq 0, \qquad b_n[f] := \frac{2}{P}\int_0^P f(t)\sin(n\omega t)dt, \quad n \geq 1,$

$$S_N[f](t) := \sum_{|n|\leq N} c_n[f]\exp(in\omega t) = \frac{a_0[f]}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n[f]\cos(n\omega t) + b_n[f]\sin(n\omega t)),$$

$$S[f](t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n[f]\exp(in\omega t) = \frac{a_0[f]}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n[f]\cos(n\omega t) + b_n[f]\sin(n\omega t)) = \lim_{N\to\infty} S_N[f](t).$$

$$\|f\|_2^2 := \frac{1}{P}\int_0^P |f(t)|^2dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n[f]|^2 = \frac{1}{4}|a_0[f]|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n[f]|^2 + |b_n[f]|^2).$$

1 Petit panorama: Joseph Fourier et l'équation de la chaleur

1. Le problème mathématique issue de la Physique:

   Pour une fonction $u_0 :]0,\pi[\mapsto \mathbb{R}$ donnée, trouver $u :]0,+\infty[_t\times]0,\pi[_x\mapsto \mathbb{R}$ solution de:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, & 0 < t, 0 < x < \pi, \\ u(t,0) = 0 = u(t,\pi), & t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), & 0 < x < \pi \end{cases}$$

2. Le Développement en série de sinus et le calcul formel:

   $u_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(0)\sin(nx)$ et $u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t)\sin(nx)$

3. Quelques problèmes mathématiques: la notion d'intégrale, les fonctions développables en séries de sinus,...

4. La réponse de Dirichlet sur la convergence ponctuelle.

5. La réponse hilbertienne: Théorème de Parseval, convergence L^2, ...

2 Créneaux et dents de scie

Pour les fonctions de période 2π suivantes, calculer leur série de Fourier. Puis étudier la convergence simple et uniforme de ces séries de Fourier.

1. f est impaire, et $f(t) = 1$ sur $]0,\pi[$. (Exemple historique calculé par Fourier sans les fameux $c_n[f]$!)

2. $f(0) = 0$, $f(t) = \frac{\pi - t}{2}$ sur $]0,2\pi[$. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

3 Séries de Fourier normalement convergentes

Dans cette exercice on va obtenir l'égalité ponctuelle entre une fonction $f \in C_{2\pi}^0$ et sa série de Fourier à l'aide du théorème de Parseval. Le théorème de Dirichlet ne sera guère utilisable ici.

1. Montrez que la série de Fourier de f converge normalement si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n[f]|$ converge si et seulement si $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n[f]|$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n[f]|$ converge.

2. Soit $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\gamma_n|$ converge. Soit $g(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n \exp(inx)$.
   Montrez que $g \in C^0_{2\pi}$ et que $c_n[g] \equiv \gamma_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n[f]|$ converge. Montrez que, sur tout $\mathbb{R}$, la série de fourier de f converge normalement et simplement vers f. On utilisera le Théorème de Parseval sur $h := f - S[f]$ pour montrer que $f = S[f]$.

4 Liens entre la régularité d'une fonction et décroissance de ses coefficients de Fourier

1. On suppose que $f \in C^k_{2\pi}$, où $k \geq 2$.
   (a) Montrer que $c_n[f^{(k)}] = i^k n^k c_n[f]$. En déduire que $c_n[f] = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ et même mieux.
   (b) Montrer que $\|f - S_N[f]\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(t) - S_N[f](t)| = O\left(\frac{1}{n^{k-1}}\right)$
2. Soit $f \in C^0_{2\pi}$, et C^1 par morceaux, montrez que sa série de Fourier converge normalement vers f.
3. Réciproquement, soient $\alpha > 0$, $f \in L^2(]0, P[$ telle que $c_n[f] = O\left(n^{-\alpha}\right)$. Donner une condition sur α pour que f admette un représentant $\widetilde{f} \in C^k_P$.
4. Etudier la régularité de: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n^{10,1}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$.

5 $f(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{\ln(n)}$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, impaire et 2π périodique.
2. Cependant, à l'aide du théorème de Parseval montrez que la série trigonométrique définissant f n'est pas la série de fourier d'une fonction de $L^2(]0, 2\pi[)$.

6 La méthode des rectangles converge très rapidement ? !

Soit $k \geq 2$, $f \in C^k_{2\pi}$, $N \in \mathbb{N} - \{0\}$, $h = \frac{2\pi}{N}$, $x_l = lh$ pour $l = 0, 1, \ldots, N$ et $R_N(f) = h \sum_{l=1}^{N} f(x_l)$

1. Pour $n \in \mathbb{Z}$, montrer que $R_N(\exp(int)) = \begin{cases} 2\pi & \text{si } N \text{ divise } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. Montrer que $\sum_{|q|=1}^{+\infty} c_{qN}[f] = O\left(\frac{1}{N^k}\right)$. En déduire que $R_N(f) = \int_0^{2\pi} f(x)dx + O\left(h^k\right)$.

Références:

Fourier: Théorie analytique de la chaleur,
Kahane, Lemarie-Rieusset, Gilles, Séries de Fourier et ondelettes,
Korner: Fourier Analysis, & Exercices in Fourier Analysis,
Krée & Vauthier, Analyse deuxième année,
Moisans,Vernotte,Tosel: Suites et Séries de fonctions,
Rudin: Principes d'analyse mathématique & Real and complex analysis,
Schatzman: Analyse numérique,
...