Quelques exemples d'équations différentielles issues de la dynamique des populations

1 Une seule population

$x(t)$ désigne le "nombre" d'individus d'une population à l'instant t. $x'(t) = kx(t)$, $x(0) = x_0$, où $k = b - d$, b le taux de naissance et d le taux de décés par unité de temps, $b > 0, d > 0, x(t) \geq 0$. k désigne le taux de croissance de la population. Si k n'est pas constant, il peut dépendre de x. L'exemple le plus simple est $k(x) = K(1 - x/\overline{x})$, $K > 0$.

1. $x'(t) = K(1 - x(t)/\overline{x}) \times x(t)$: étudier la stabilité des deux points fixes, le comportement asumptotique des solutions quand $t \to +\infty$, pour $x_0 \in [0, +\infty[$ et interpréter les constantes $K, \overline{x}$.
   Comparer vos résultats à la solution explicite.

2. Etudier l'effet d'un prélèvement constant de la population en fonction du paramètre $P > 0$: $x'(t) = K(1 - x(t)/\overline{x}) \times x(t) - P$.

3. Etudier l'effet d'un prélèvement relatif constant de la population en fonction du paramètre $p > 0$: $x'(t) = K(1 - x(t)/\overline{x}) \times x(t) - p \times x(t)$.

2 Système de Lotka-Volterra

On étudie un système proies-prédateurs de deux populations. Historiquement ce modèle a d'abord était proposé par Volterra pour étudier les populations de sardines et de requins dans la Méditérranée. Soient x_0, y_0, a, b, c, d des constantes positives, le système s'écrit:
$x' = ax - bxy; y' = -cy + dxy$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

1. Modélisation:
   (a) Identifier la variable qui représente les proies et celle des prédateurs (cas $b = 0 = d$).
   (b) Interpréter les termes d'interactions xy.
   (c) Résoudre explicitement et interpréter le cas $y_0 = 0$ puis le cas $x_0 = 0$.
   (d) Etudier et interpréter (si possible) la stabilité linéaire des points d'équilibres.

   Pour toute la suite de l'execrice on supposera que les *constantes sont strictement positives.*

2. Montrer que $x(t)$ et $y(t)$ sont toujours strictement positives.

3. Exprimer $\dfrac{dy}{dx}$ en fonction de (x, y). En déduire que $(ax - bxy)dy = (-cx + dxy)dx$ puis que $H(x, y) = bx + dy - a \ln y - c \ln x$ est une intégrale première strictement convexe. Comment se justifie mathématiquement un tel calcul?

4. En déduire que les solutions sont périodiques et calculer la valeur moyenne de $(x(t), y(t))$ sur une période.

5. Quel est l'effet d'un prélèvement relatif constant sur les deux populations?

Références: Chambert-Loir & Fermigier, T3, p.137; Arnold; Hubbard & West.