Exemples d'utilisations de fonctions définies par des séries

1 Recherche d'exemples et de contre-exemples pour valider ou invalider certaines affirmations

1. Trouver $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge mais telle que $f(x)$ ne converge pas vers 0 quand $x \to +\infty$.
2. Trouver une fonction de L^1 dont l'ensemble des pieds de ses asymptotes verticales est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Trouver une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que sa série de Taylor diverge toujours sauf en zéro.
   $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{n!}$
4. Trouver une fonction monotone dont les points de discontinuités sont exactement $\mathbb{Q}$.
   $s(x) := \sum_{n\in\mathbb{N} \text{ et } r_n<x} \frac{1}{2^n}$ où $(r_n)_n$ est un suite qui énumére tous les rationnels.
5. Trouver une fonction continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable nulle part.
6. Trouver une fonction périodique dont la série de Fourier diverge en 0.
7. Trouver une série trigonométrique qui n'est pas une série de Fourier.

2 Pour démontrer un résultat

1. Lemme de Borel: Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^N$, montrer qu'il existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f^{(n)}(0) = a_n$ pour tout n.
2. Montrer que les fermés de $\mathbb{R}$ sont exactement les zéros des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

3 Pour résoudre des équations différentielles

1. Résoudre $x''(t) + t^2 x(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$
2. Résoudre l'équation de poisson, de la chaleur, des ondes, pour $x \in]0, \pi[$ et (véntuellement) $t > 0$ avec des conditions de Dirichlet au bord, en développant la fonction en espace en série de $\sin(nx)$.

$$-u''(x) = f(x), \qquad u(0) = 0 = u(\pi), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(t,0) = 0 = u(t,\pi), \quad u(0,x) = u_0(x), \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(t,0) = 0 = u(t,\pi), \quad u(0,x) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x) \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

   où, $0 < x < \pi, 0 < t$, et u désigne la fonction inconnue et les autres fonctions sont des données du problème développables en série de sinus.

Pour résoudre des équations fonctionnelles ...

Références: Gourdon, Pommelet, Rudin, Tissier & Miallet , Yosida, Zuily & Queffélec.