

Utilisation de la dénombrabilité en Analyse et en Probabilités

I) Dénombrabilité

N, Z, Q, union dénombrable d'ensemble dénombrable,

R n'est pas dénombrable

II) Utilisation de suites

exemples: Tout réel s'approche par des rationnels (et même décimaux)

Bolzano-Weierstrass

A) Séparable, densité:

- **R**, les fonctions continues sur un segment, L^1 mais pas L^∞

- lemme des moments

- construction de l'intégrale des fonctions réglées, de la transformée de Fourier

B) procédé d'extraction diagonal de Cantor diagonal:

- exemple d'introduction $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable

- produit dénombrable d'espace métrique compact

- Ascoli

C) Baire et applications: intersection dénombrable d'ouvert dense

caractérisation de limites par des familles de suites

Banach-Steinhaus, Graphe fermé, l'application ouverte,

III) Dénombrable ou non

A) C'est forcément dénombrable

Famille sommable (les termes non nuls), base hilbertienne d'un Hilbert séparable

sous ensemble d'un séparable

existence de base de voisinage dénombrable d'un espace métrique compact

Exemples de spectres: laplacien sur $[0,1]$, ...

B) N'utilise pas un aspect dénombrable

axiome du choix, théorème de la base incomplète, Hahn-Banach

IV) Probabilités

- l'additivité dénombrable, union dénombrable de négligeable,

autre démonstration de $[0,1]$ n'est pas dénombrable avec la loi uniforme sur $[0,1]$

- univers du schéma de Bernoulli n'est pas dénombrable,

construction de P sur l'univers du schéma de Bernoulli

- Borel-Cantelli:

le singe savant,

marche aléatoire retour à l'origine dans \mathbb{R}^d