# Comportement asymptotique de suites numériques.
# Rapidité de convergence. Exemples.

1) Suites de réferences: $n^a$, $a^n$, $n!$, $n^n$

1. Ordre de convergence par comparaison aux suites de références:
   Rapidité de convergence: algébrique, géométrique, superconvergence (quadratique)
   convergence algébrique: de l'ordre de $1/n^a$, $a>0$ ( e par la méthode d'Euler)
   convergence géométrique: de l'ordre de $r^n$, $0<r<1$ ( Pi par Archimède)
   superconvergence: $o(r^n)$ pour tout $0<r<1$ ( Algorithme de Babylone)
   exemples: $1/n!$, $e_{n+1} = o(e_n)$ ; $e_{n+1} = O(e_n^2)$ & $e_n \to 0$ .

   divergence: à l'infini ,
   $a^n$, a de module 1, (Polygône régulier ou suites équiréparties)

2) utilisation de séries et d'intégrales
   exemple classique: la constante gamma d'Euler, Stirling, ....

3) Le cas des suites récurrentes: $u_{n+1} = f(u_n)$.

   $l=f(l)$, $r=f'(l)$,
   i) $0 < |r| < 1$ convergence géométrique

   ii) $r=0$, superconvergence Newton
   exemple élémentaire et éclairant $u_{n+1} = u_n^2$, $0< u_0 < 1$

   iii) $|r|=1$, le cas critique, Quand il y a convergence elle est algébrique
   $u_{n+1} = \sin(u_n)$ trrès (trop?) classique
   $u_{n+1} = (1+ u_n^2)/2$ pour changer

   - exemple des suites homographiques: convergence géométrique ou algébrique ou divergente
     (tan n) est une suite homographique dense dans R.

4) Autres Exemples demandant des méthodes spécifiques
   - Méthode d'intégration numérique: convergence algébrique à l'aide des formules de Taylor
   - La méthode de la sécante, superconvergence, orde de convergence*
   - suite adjacentes: cas des moyennes (PGCD)
   - Intégrale de Wallis (un exemple de la méthode de Laplace)
   - Vitesse de convergence d'une moyenne de Césàro d'une suite convergence?
     (cas u_n monotone, superconvergente, alternée)
   - suites définies implicitement:
     $1 < u_n < e < v_n$ uniques racines de $x^n = \exp(x)$ pour $x > 0$, $n > 2$.

5) Accélération de convergence: Richardson, Aitken

Références: Baranger, Chambert-Loir&Fermigier, Demailly , Dieudonné,
Gourdon, Mialet-Tissier, Rouvière PGCD, Schatzmann