

Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.

I) **Dérivation dans \mathbb{C} .**

exemples de fonctions dérivables: Polynômes, Séries entières, $\exp(z)$

$f+g$, f/g sont dérivables.

Conditions de **Cauchy-Riemann**, fonctions harmoniques

Interprétation géométrique : similitude, conservation des angles

et en terme de dépendance en $x-iy$

II) **Intégrale le long d'un chemin**

- Primitive (détermination du logarithme)

- **Théorème de Cauchy**

(dém simple si f est continue avec $\gamma(s,t)$)

Calcul de l'intégrale du sinus cardinal, de l'intégrale de Fresnel

- **Formule de Cauchy**, Indice

III) **Analycité**

- Analycité des fonctions holomorphes

inégalités de Cauchy, théorème et Liouville (ex: le th d'Alembert)

- principe du prolongement analytique

- principe du maximum

- suites et séries de fonctions holomorphes.

Fonction dzéta de Riemann

IV) Exemples & applications

- Intégrale à paramètre holomorphe:

Fonction Gamma d'Euler: holomorphie, prolongement ($\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$)

- Théorème de Montel

- Décroissance des coefficients de Fourier d'une fonction holomorphe périodique sur \mathbb{R} .

- Résolution de l'équation de Laplace avec condition de Dirichlet dans un disque.

- Lemme des trois droites de Hadamard.

Références: Chambert-Loir; Candelpergher; Cartan; Dieudonné; Queffelec-Zuily; Rudin; Tauvel;