Rapport de l'agrégation interne et CAERPA de mathématiques année 2003

Ce rapport, rédigé par des membres du jury, est publié sous la responsabilité du président du jury

Table des matières

1 Composition du jury **4**

2 Statistiques de l'agrégation interne 2003 **9**

3 Statistiques du CAERPA 2003 **14**

4 Première épreuve écrite **20**
4.1 Énoncé de la première épreuve écrite 20
4.2 Corrigé de la première épreuve écrite 28
4.3 Commentaires sur la première épreuve écrite 35

5 Deuxième épreuve écrite **37**
5.1 Énoncé de la deuxième épreuve écrite 37
5.2 Corrigé de la deuxième épreuve écrite 44
5.3 Commentaires sur la deuxième épreuve écrite 51

6 Rapport sur les épreuves orales **55**
6.1 Considérations générales 55
6.1.1 Au niveau des programmes 55
6.1.2 Dans l'organisation des épreuves orales 55
6.2 La première epreuve orale 56
6.2.1 Modalités pratiques 56
6.2.2 Remarques globales sur la première épreuve 56
6.2.3 Sur le plan 57
6.2.4 Sur l'exposé 58
6.2.5 Sur les questions du jury 58
6.3 La seconde épreuve orale 59
6.3.1 Sur l'exposé motivé des exercices 59
6.3.2 Sur la résolution de l'exercice proposé 60
6.3.3 Sur les questions du jury 60
6.3.4 Commentaire général sur la seconde épreuve 60
6.4 Sujets de leçons et d'exercices 63

7 Bibliothèque de l'agrégation de mathématiques **72**

Composition du jury

1 Composition du jury

Président

VAN DER OORD	Eric	IGEN	

Vice-présidents

CAMUS	Jacques	Professeur des Universités	RENNES
GRAMAIN	André	Professeur des Universités	TOURS
SKANDALIS	Georges	Professeur des universités	Université Denis Diderot (Paris VII) PARIS

Secrétaire général

CHEVALLIER	Jean Marie	Assistant agrégé	ORLEANS

ADAD	René	Professeur agrégé	Lycée Militaire AIX EN PROVENCE
ALDON	Gilles	Professeur agrégé	Lycée Jacques Brel VENISSIEUX
ALESSANDRI	Michel	Professeur Chaire Supérieure	MONTPELLIER
AUDOUIN	Marie-Claude	IA-IPR	VERSAILLES
BARBOLOSI	Dominique	Maître de Conférences	Université d'Aix-Marseille III MARSEILLE
BATUT	Christian	Maître de Conférences	BORDEAUX
BENNEQUIN	Daniel	Professeur des universités	Université Denis Diderot (Paris VII) PARIS
BLONDEL	Corinne	Chargée de recherches	CNRS
CHEVALLIER	Marie-Elisabeth	Professeur Chaire Supérieure	Lycée Schweitzer MULHOUSE
CHMURA	Rémi	Professeur Agrégé	Lycée Roosevelt REIMS
COULET	Cyrille	Professeur Chaire Supérieure	Lycée P.DE GIRARD AVIGNON
COURBON	Denise	IA-IPR	LYON
D'ALMEIDA	Jean	Professeur des Universités	LILLE
DEGUEN	Eliane	IA-IPR	RENNES
DICHI	Henri	Maître de Conférences	CLERMONT-FERRAND
DUCOURTIOUX	Jean Louis	Maître de Conférences	CLERMONT FERRAND
DUCOURTIOUX	Catherine	Professeur agrégé	Clermont Ferrand
ELKIK-LATOUR	Renée	Professeur des universités	ORSAY
FELLONEAU	Claude	IA-IPR	BORDEAUX
FLEURY-BARKA	Odile	Maître de Conférences	REIMS
FONTAINE	Philippe	Professeur Chaire Supérieure	Lycée Guez de Balzac ANGOULEME
GALL	Philippe	Professeur Chaire Supérieure	Lycée Champollion GRENOBLE
GENAUX	Patrick	Professeur Chaire Supérieure	Lycée Kléber STRASBOURG
GENOUD	Daniel	Professeur Chaire Supérieure	Lycée La Martinière-Monplaisir LYON
GODEFROY	Gilles	Directeur de Recherches	CNRS
GUELFI	Pascal	Professeur Chaire Supérieure	CLERMONT-FERRAND
HIJAZI	Oussama	Professeur des universités	NANCY
HUGON	Albert	IGEN	
KERVADEC	Elisabeth	Professeur agrégé	Lycée Chateaubriand RENNES

LAZAR	Yvette	Professeur agrégé	Lycée Jean Macé RENNES
LAZAR	Boris	IA-IPR	RENNES
LEFEVRE	Pascal	Maître de Conférences	Université d'Artois
LEPEZ	Catherine	Professeur Chaire supérieure	Lycée Faidherbe Lille
LINO	Danièle	Professeur Chaire Supérieure	Lycée Roosevelt REIMS
LODAY-RICHAUD	Michèle	Professeur des universités	Angers
LODS	Véronique	Professeur agrégé	Lycée Camille Guérin POITIERS
LOSEKOOT	Anne	Professeur Chaire Supérieure	Lycée Bellevue TOULOUSE
MALLORDY	Jean François	Professeur agrégé	Lycée Blaise Pascal CLERMONT FERRAND
MARCHAL	Jeannette	IGEN	
MBEKHTA	Mostafa	Professeur des Universités	LILLE
MILHAUD	Nadine	IA-IPR	TOULOUSE
MOSSE	Brigitte	Maître de conférences	MARSEILLE
MURAT	Christiane	Professeur Chaire Supérieure	Lycée Condorcet Paris
OLIVIER	Michel	Professeur des Universités	BORDEAUX 1
PAJOR	Alain	Professeur des universités	Université de Marne la Vallée
PONS	Geneviève	Maître de Conférences	Université Dauphine PARIS
RITTAUD	Benoît	Maître de Conférences	PARIS XIII
PAJOR	Alain	Professeur des universités	Université de Marne la Vallée
PONS	Geneviève	Maître de Conférences	Université Dauphine PARIS
RITTAUD	Benoît	Maître de Conférences	PARIS XIII
ROSER	Erick	IA-IPR	POITIERS
ROUSSET-BERT	Suzette	IA-IPR	STRASBOURG
ROUX	Daniel	Maître de Conférences	CLERMONT-FERRAND
SCHILTZ	Dominique	Professeur Chaire Supérieure	Lycée Faidherbe LILLE
SERRA	Eric	IA-IPR	NICE
SESTER	Olivier	Maître de Conférences	Marne-la-Vallée
SORBE	Xavier	IA-IPR	BORDEAUX
SUFFRIN	Frédéric	Professeur agrégé	Lycée Kléber STRASBOURG
THEBAULT	Roland	Professeur Chaire Supérieure	Lycée Chateaubriand RENNES
VENTURA	Joseph	Professeur Chaire supérieure	Lycée Dumont d'Urville TOULON
VIAL	Jean-Pierre	Professeur Chaire Supérieure	Lycée Buffon PARIS

Statistiques

AGRÉGATION INTERNE ET CAERPA DE MATHÉMATIQUES
SESSION 2003
RÉSULTATS STATISTIQUES

Les épreuves écrites ont eu lieu les 11 et 12 février 2003, la liste d'admissibilité a été signée le 31 mars 2003 :
Agrégation interne : 288 admissibles ; CAERPA : 27 admissibles.

Les épreuves orales se sont déroulées du 6 avril au 14 avril 2003 au lycée Fénelon à Paris. La liste d'admission a été signée le 15 avril 2003 :
Agrégation interne : 130 admis ; CAERPA : 18 admis.

Remarques : Comme on peut le constater sur le tableau d'évolution des deux concours donnés ci-après, le nombre des candidats présents aux deux épreuves écrites est relativement stable par rapport à l'an passé. Le nombre de postes est stable aux deux concours.

Le calendrier prévu pour la session 2004 est le suivant :
Écrit : février 2004.
Oral : non encore fixé. Nombre de places offertes au concours en 2004 :

Agrégation interne : non encore fixé CAERPA : non encore fixé.

Avertissement : Le programme du concours est inchangé, se reporter au BO n°3 du 29 avril 1999.

Évolution des concours

AGRÉGATION INTERNE

Année	Postes	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
1989	120	2951	1706	232	120+52*
1990	225	2386	1326	444	225+85*
1991	352	2575	1299	510	352+43*
1992	331	2538	1195	508	331+34*
1993	334	2446	1184	478	334+13*
1994	330	2520	1244	475	330+12*
1995	330	2211	1212	446	330
1996	246	2249	1150	441	246
1997	200	2113	1084	436	200
1998	200	2083	1071	432	200
1999	168	1690	1162	436	168
2000	130	1868	1257	327	130
2001	129	1944	1419	289	125
2002	129	1845	1400	288	129
2003	130	1842	1479	288	130

*liste supplémentaire

CAERPA

Année	Postes	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
1989					
1990					
1991	13				10
1992	20	269	102	22	14
1993	40	302	128	42	25
1994	36	331	156	57	36
1995	31	340	155	53	31
1996	39	375	176	64	39
1997	32	379	181	58	32
1998	28	372	169	61	28
1999	27	328	225	64	26
2000	27	359	246	46	24
2001	25	383	268	35	18
2002	23	326	229	22	10
2003	20	325	258	27	15

2 Statistiques de l'agrégation interne 2003

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites
Les candidats aux concours étrangers gérés par le jury ne sont pas comptabilisés
Les candidats étrangers aux concours français sont comptés normalement

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	1842	1445	288	130
Femmes	572	440	88	40
Français et U.E.	1842	1445	288	130
Union Européenne	3	2	1	0
Étrangers hors UE	0	0	0	0
Moins de 50 ans	1681	1332	279	125
Moins de 45 ans	1470	1169	256	109
Moins de 40 ans	1238	994	229	97
Moins de 35 ans	909	747	197	87
Moins de 30 ans	274	226	85	34

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	8	6	4	12	10	8	14	11	9
épreuve 2 (sur 20)	8	5	3	13	11	9	14	12	10
Total écrit (sur 200)	79	55	37	115	101	92	129	112	98

le total d'écrit est ramené sur 20

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	2	2	2	1	1	0
19	2	2	2	3	3	3	6	6	4
18	3	3	3	13	13	13	13	13	9
17	7	7	7	15	15	14	18	18	13
16	14	14	14	19	19	16	32	32	22
15	17	17	17	32	32	24	43	42	30
14	26	26	24	47	46	32	54	53	38
13	35	35	30	68	65	44	88	85	51
12	58	58	47	104	93	56	118	115	66
11	96	96	70	158	129	72	189	172	92
10	147	147	93	200	157	85	245	203	109
9	242	242	121	293	197	103	315	230	116
8	353	288	130	390	228	109	438	259	128
7	499	288	130	590	260	124	532	270	128
6	658	288	130	809	277	129	671	278	129
5	845	288	130	1024	285	130	771	283	129
4	1037	288	130	1239	288	130	938	286	130
3	1218	288	130	1363	288	130	1097	287	130
2	1343	288	130	1437	288	130	1203	287	130
1	1430	288	130	1460	288	130	1402	288	130
0	1445	288	130	1471	288	130	1453	288	130

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	12	9	7	14	12	10
épreuve 2 (sur 20)	12	9	7	14	11	9
Total général (sur 400)	225	197	174	245	226	212

le total général est ramené sur 20

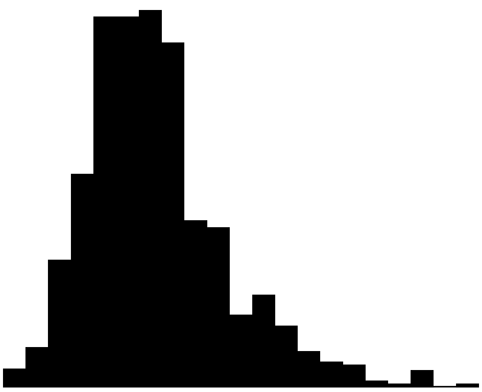
Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	1	1	1	1
19	1	1	2	2	3	3
18	1	1	3	3	3	3
17	1	1	5	5	8	8
16	2	2	14	14	17	17
15	4	4	25	25	24	24
14	15	15	40	40	39	36
13	20	20	59	56	53	46
12	40	40	72	66	69	59
11	81	81	97	81	94	76
10	130	130	126	97	122	92
9	184	130	151	110	150	105
8	250	130	187	120	188	115
7	276	130	214	123	216	124
6	279	130	262	128	252	127
5	279	130	273	129	272	129
4	279	130	281	130	278	130
3	279	130	281	130	278	130
2	279	130	282	130	279	130
1	279	130	282	130	279	130
0	279	130	282	130	279	130

Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	105	84	13	3
BESANCON	37	34	8	4
BORDEAUX	80	57	11	5
CAEN	38	29	6	4
CLERMONTFERRAND	32	25	3	2
DIJON	49	36	11	5
GRENOBLE	66	53	10	4
LILLE	135	110	19	10
LYON	78	62	19	11
MONTPELLIER	58	49	10	3
NANCY METZ	63	53	11	6
POITIERS	39	30	5	2
RENNES	52	39	10	7
STRASBOURG	56	46	8	4
TOULOUSE	65	50	9	4
NANTES	44	32	5	3
ORLEANS TOURS	62	50	8	4
REIMS	45	37	6	3
AMIENS	62	55	15	3
ROUEN	78	67	17	5
LIMOGES	25	20	0	0
NICE	65	56	12	4
CORSE	13	10	2	2
REUNION	79	58	6	1
MARTINIQUE	35	21	1	1
GUADELOUPE	33	29	2	1
GUYANNE	12	7	2	1
PARIS/CRET/VERS	336	246	59	28

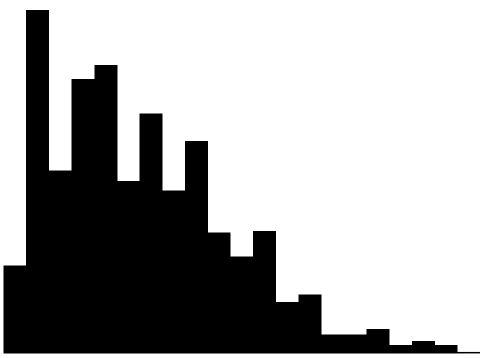
Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	33	22	2	0
ENS.FPE.TIT	24	17	1	0
AG FPE	12	10	5	3
CERTIFIE	1679	1329	274	127
PLP	94	67	6	0

catégories				
	I	P	a	A
ENS.TIT.MEN	1799	1415	280	127
AG.FONC.PUB.ETA	40	30	8	3

Centres d'écrit				
	I	P	a	A
DIVERS	48	35	1	0
AIX	85	71	12	3
AJACCIO	13	10	2	2
AMIENS	62	55	15	3
BESANCON	37	34	8	4
BORDEAUX	50	37	7	2
CAEN	38	29	6	4
CLERMONT FERRAN	32	25	3	2
DIJON	49	36	11	5
GRENOBLE	66	53	10	4
LILLE	135	110	19	10
LYON	78	62	19	11
METZ	32	27	5	2
MONTPELLIER	58	49	10	3
NANCY	31	26	6	4
NANTES	44	32	5	3
NICE	65	56	12	4
ORLEANS	62	50	8	4
PARIS	336	246	59	28
PAU	29	19	4	3
POITIERS	37	29	5	2
REIMS	45	37	6	3
RENNES	52	39	10	7
ROUEN	78	67	17	5
STRASBOURG	56	46	8	4
TOULOUSE	65	50	9	4
CAYENNE	12	7	2	1
DZAOUDZI-MAMOUT	16	13	2	0
FORT DE FRANCE	35	21	1	1
POINTE A PITRE	33	29	2	1
SAINT DENIS REU	63	45	4	1



Écrit 1



Écrit 2

Oral 1

Oral 2

Seuil d'admissibilité : 86.00/200 (8.60/20)
Seuil d'admission : 200.00/400 (10.00/20)
Pas de liste complémentaire

3 Statistiques du CAERPA 2003

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites
Les candidats aux concours étrangers gérés par le jury ne sont pas comptabilisés
Les candidats étrangers aux concours français sont comptés normalement

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	325	254	27	15
Femmes	135	112	12	6
Moins de 50 ans	297	232	25	13
Moins de 45 ans	243	189	17	8
Moins de 40 ans	195	155	14	7
Moins de 35 ans	120	98	13	6
Moins de 30 ans	31	26	8	4

Écrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	7	5	4	14	11	10	15	13	11
épreuve 2 (sur 20)	6	3	1	11	9	8	13	10	8
Total écrit (sur 200)	63	43	26	112	103	93	124	110	98

le total d'écrit est ramené sur 20

Écrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	2	2	2	0	0	0
16	0	0	0	2	2	2	0	0	0
15	0	0	0	4	4	4	1	1	0
14	0	0	0	6	6	6	3	3	2
13	2	2	2	7	7	7	5	5	4
12	3	3	3	14	11	8	5	5	4
11	8	8	7	29	18	11	6	6	4
10	13	13	9	37	21	12	13	10	8
9	23	23	14	46	23	12	19	13	8
8	35	27	15	56	24	13	40	22	11
7	50	27	15	77	27	15	49	24	13
6	69	27	15	117	27	15	67	26	14
5	103	27	15	146	27	15	86	26	14
4	138	27	15	194	27	15	112	27	15
3	178	27	15	226	27	15	145	27	15
2	217	27	15	251	27	15	166	27	15
1	251	27	15	254	27	15	238	27	15
0	254	27	15	256	27	15	256	27	15

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	12	9	7	14	10	9
épreuve 2 (sur 20)	11	9	7	13	11	9
Total général (sur 400)	215	200	170	234	207	200

le total général est ramené sur 20

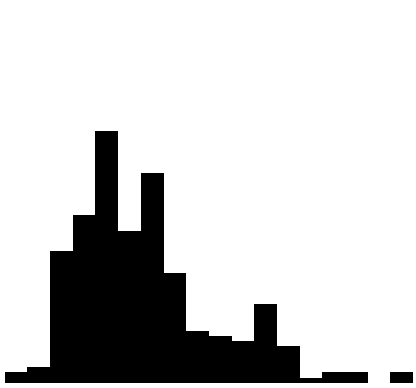
Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	1	1
17	0	0	1	1	1	1
16	0	0	1	1	2	2
15	1	1	2	1	2	2
14	1	1	4	3	2	2
13	1	1	5	4	4	4
12	2	2	6	5	5	5
11	4	4	8	6	9	8
10	15	15	10	8	12	9
9	19	15	14	12	16	13
8	23	15	18	13	18	14
7	27	15	20	14	23	15
6	27	15	24	15	25	15
5	27	15	26	15	26	15
4	27	15	27	15	27	15
3	27	15	27	15	27	15
2	27	15	27	15	27	15
1	27	15	27	15	27	15
0	27	15	27	15	27	15

Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	24	19	1	1
BESANCON	2	0	0	0
BORDEAUX	11	7	2	1
CAEN	6	4	0	0
CLERMONTFERRAND	2	2	1	1
DIJON	8	7	1	0
GRENOBLE	15	14	2	0
LILLE	41	36	4	1
LYON	16	13	0	0
MONTPELLIER	6	4	0	0
NANCY METZ	7	6	0	0
POITIERS	7	5	2	2
RENNES	31	28	6	4
STRASBOURG	7	7	1	0
TOULOUSE	10	8	1	1
NANTES	35	25	0	0
ORLEANS TOURS	6	4	0	0
REIMS	8	8	1	0
AMIENS	12	8	0	0
ROUEN	5	5	0	0
NICE	3	1	0	0
REUNION	1	1	0	0
MARTINIQUE	2	1	0	0
GUADELOUPE	2	0	0	0
GUYANNE	1	1	0	0
PARIS/CRET/VERS	57	40	5	4

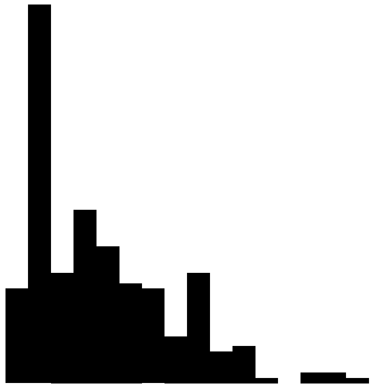
Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	15	9	0	0
MAIT-DOC REM TI	293	233	26	14
MAITRE ECH INST	17	12	1	1

catégories				
	I	P	a	A
ENSEIGN PRIVE	325	254	27	15

Centres d'écrit				
	I	P	a	A
DIVERS	113	79	0	0
AIX	15	13	1	1
BORDEAUX	8	5	1	0
CLERMONT FERRAN	2	2	1	1
DIJON	8	7	1	0
GRENOBLE	15	14	2	0
LILLE	41	36	4	1
PARIS	57	40	5	4
PAU	3	2	1	1
POITIERS	7	5	2	2
REIMS	8	8	1	0
RENNES	31	28	6	4
STRASBOURG	7	7	1	0
TOULOUSE	10	8	1	1



Écrit 1



Écrit 2

Oral 1

Oral 2

Seuil d'admissibilité : 86.00/200 (8.60/20)
Seuil d'admission : 200.00/400 (10.00/20)
Pas de liste complémentaire

Épreuves écrites

4 Première épreuve écrite

4.1 Énoncé de la première épreuve écrite

DODÉCAÈDRE

Si z est un nombre complexe, son conjugué est noté $\overline{z}$. $Re(z)$ désigne sa partie réelle.
Le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ d'un espace vectoriel euclidien E est noté $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ et la norme associée est notée $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$.
$SO(E)$ désigne le groupe des isométries directes (i.e. de déterminant égal à $+1$) de l'espace euclidien E, et 1_E l'application identique de E dans lui-même.
La distance entre deux points M et N d'un espace affine euclidien est notée $\|\overrightarrow{MN}\|$.
Si n est élémentde $\mathbb{N}^*$, $[1..n]$ désigne l'ensemble des entiers naturels de 1 à n.

Préambule. Rappels sur les isométries directes en dimension trois

E désigne ici un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois et $GL(E)$ désigne le groupe des automorphismes de E.
Soit f un élément de $GL(E)$, soit $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ une base orthonormée directe et soit M la matrice représentant f dans la base $\mathcal{B}$. On rappelle que f est élément de $SO(E)$ si et seulement si la matrice M est orthogonale directe. Dans ce cas, et sous réserve que f ne soit pas égal à 1_E, f est une rotation ; elle est alors caractérisée par un axe, déterminé et orienté par un vecteur $\mathbf{u}$ non nul, et un angle θ, orienté autour de cet axe, déterminé par sa mesure, encore notée θ, qui est un réel défini à 2π près. On note alors : $f = Rot(\mathbf{u}, \theta)$.

1. On pose $M = [m_{i,j}]$ pour $(i, j) \in [1..3]^2$.
   Rappeler des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les coefficients de M pour qu'elle soit orthogonale directe.

   Dans les trois questions qui suivent, on suppose que f n'est pas égale à 1_E et que les conditions précédentes sont réalisées.

2. Indiquer comment trouver un vecteur $\mathbf{u}$.
3. Montrer que la trace de la matrice M vérifie :
   $$tr\ (M) = 1 + 2\cos\theta$$
   À quelle condition f est-elle un demi-tour ?
4. On suppose que f n'est pas un demi-tour ; soit $\mathbf{v}$ un vecteur quelconque non colinéaire à $\mathbf{u}$. Montrer que le produit mixte $(\mathbf{v}, f(\mathbf{v}), \mathbf{u})$ est non nul et que son signe est celui de $\sin\theta$.

Partie I . Étude du pentagone régulier

E désigne, dans cette partie seulement, un espace vectoriel euclidien de dimension deux.
On pose :
$$\omega = \mathbf{e}^{2i\pi/5}$$

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien associé à E et soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un élément de $\mathcal{P}^5$. On dit que les cinq points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 *pris dans cet ordre* forment un *pentagone régulier* si et seulement si il existe un point O de $\mathcal{P}$, un réel strictement positif r, et un repère orthonormé $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ de $\mathcal{P}$ tels que les cinq points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 aient respectivement pour affixes les complexes :

$$r\omega^k \ , \ k = 0, 1, 2, 3, 4$$

O, r et le repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ sont alors déterminés de manière unique. On appellera dans la suite pentagone régulier noté plus brièvement $A_0A_1A_2A_3A_4$ tout à la fois l'ensemble ordonné des cinq points ainsi obtenus et appelés *sommets* du pentagone régulier dans $\mathcal{P}$ et l'ensemble ordonné des vecteurs $\overrightarrow{OA_0}, \cdots, \overrightarrow{OA_4}$ de E.
On dit alors que, pour k variant de 0 à 3, A_k et A_{k+1} sont des sommets *consécutifs*, ainsi que A_4 et A_0. O est le *centre* du pentagone régulier.

1. On suppose ici $r = 1$ et on pose : $a' = \cos(\frac{2\pi}{5}) = Re(\omega)$.

   (a) Montrer que ω vérifie la relation :

   $$1 + (\omega + \overline{\omega}) + (\omega^2 + \overline{\omega}^2) = 0$$

   En déduire que : $a' = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

   (b) On pose $a = 2a'$ et $b = \dfrac{1}{a}$. Montrer que a est solution d'une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{Z}$; montrer qu'il en est de même pour b.

   (c) Calculer $a, b, ab, a + b, b - a$ et $a^2 + b^2$.
   (On mettra les résultats sous la forme $x + y\sqrt{5}$ avec x et y rationnels.)

   (d) Calculer en fonction de b le rapport :

   $$p = \frac{\|\overrightarrow{A_0A_2}\|}{\|\overrightarrow{A_0A_1}\|}$$

   (e) Montrer que :

   $$\|\overrightarrow{A_0A_1}\| = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

2. Soit$(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4)$ un élément de $\mathcal{P}^5$ tel que les points M_k, pour k variant de 0 à 4, soient deux à deux distincts ; il résulte de ce qui précède que les conditions (a) et (b) suivantes sont nécessaires pour que $M_0M_1M_2M_3M_4$ soit un pentagone régulier :

   (a) Il existe un point O de $\mathcal{P}$ et un réel strictement positif r tels que les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 appartiennent au cercle de centre O et de rayon r.

   (b) Les distances $\|\overrightarrow{M_0M_1}\|, \|\overrightarrow{M_1M_2}\|, \|\overrightarrow{M_2M_3}\|, \|\overrightarrow{M_3M_4}\|, \|\overrightarrow{M_4M_0}\|$ sont toutes égales.

   Montrer qu'elles ne sont pas suffisantes (si $(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4)$ définit un pentagone régulier, on pourra considérer $(M_0, M_2, M_4, M_1, M_3)$) ; montrer que c'est toutefois bien le cas si on précise dans la condition (b) que ces distances sont égales à :

   $$\frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

   (on pourra étudier à l'aide de coordonnées polaires la fonction $M \mapsto \|\overrightarrow{M_0M}\|$ définie sur un demi-cercle dont M_0 est l'une des extrêmités).

3. On désigne par Γ l'ensemble des déplacements de $\mathcal{P}$ conservant l'ensemble des cinq sommets d'un pentagone régulier.

(a) Montrer que les éléments de Γ autres que l'identité sont des rotations de centre 0 et que Γ est un sous-groupe du groupe $Isom^+(\mathcal{P})$ des déplacements de $\mathcal{P}$.

(b) Montrer que Γ est isomorphe à un sous-groupe de $SO(E)$. Déterminer le cardinal de Γ.

(c) Montrer que Γ est cyclique. Par lesquels de ses éléments est-il engendré ?

Partie II. Mise en place du dodécaèdre

Pour toute la suite du problème, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois et $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien associé à E, rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. *On ne manquera pas, pour tout ce qui suit, de se rapporter, pour plus de commodité, au dessin fourni à la fin de l'énoncé.*

On définit les huit sommets $ABCDA'B'C'D'$ d'un cube noté $\mathcal{C}_0$ comme suit par leurs coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$:

$$A = (1,1,1), B = (-1,1,1), C = (-1,-1,1), D = (1,-1,1)$$

A', B', C', D' désignent leurs symétriques respectifs par rapport à O.

1. (a) Montrer l'existence d'un point unique $J = (a, 0, b')$ avec $b' > 1$ tel que

$$\|\overrightarrow{JA}\| = \|\overrightarrow{JD}\| = 2a$$

   et exprimer b' en fonction de b.

   (b) I désigne le transformé de J dans le demi-tour d'axe $(O, \mathbf{k})$. I' et J' sont les transformés respectifs de I et J dans la symétrie par rapport à O. Déterminer les points I, I', J' par leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$.

2. On définit de même K, L, M, N ainsi que leurs symétriques respectifs K', L', M', N' par rapport à O par les conditions suivantes :

   (a) $\overrightarrow{KL} = 2a\mathbf{j}$, $\|\overrightarrow{KB'}\| = \|\overrightarrow{KD}\| = 2a$, K et L se correspondent dans le demi-tour d'axe $(0, \mathbf{i})$ et la première coordonnée de K est supérieure à 1.

   (b) $\overrightarrow{MN} = 2a\mathbf{k}$, $\|\overrightarrow{NA}\| = \|\overrightarrow{NB}\| = 2a$, M et N se correspondent dans le demi-tour d'axe $(0, \mathbf{j})$ et la seconde coordonnée de N est supérieure à 1.

   Préciser en fonction de a et b les coordonnées de ces huit nouveaux points.

3. L'ensemble des vingt points $A, B, C, D, I, J, K, L, M, N, A', B', C', D', I', J', K', L', M', N'$ ainsi définis déterminent un *dodécaèdre* qui sera considéré à la fois comme ensemble de vingt points de $\mathcal{E}$ appelés *sommets* ou comme ensemble de vingt vecteurs de E : $\overrightarrow{OA}, \dots, \overrightarrow{ON'}$.
   On dira que deux sommets sont *opposés* si et seulement si ils se correspondent dans la symétrie par rapport à O ; ainsi, les paires $\{A, A'\}, \{B, B'\}, \cdots, \{N, N'\}$ sont formées de sommets deux à deux opposés.
   On dit que le cube $\mathcal{C}_0 = ABCDA'B'C'D'$ est *inscrit* dans le dodécaèdre.
   On appelle *face* du dodécaèdre l'un des douze sous-ensembles ordonnés de sommets suivants :

$$AJDKL, LKB'I'C', ALC'MN, NMD'K'B, ANBIJ, MC'I'J'D'$$

   ainsi que les six autres obtenus par symétrie par rapport à O.

   Montrer que les points $AJDKL$ appartiennent à un même plan et donner une équation de ce plan.
   (On pourra commencer par établir qu'une telle équation est de la forme $\alpha x + \beta z = \gamma$ puis déterminer les coefficients en fonction de a et b.) Donner de même une équation de la face $ANBIJ$.

4. (a) Déterminer les coordonnées de O_1, isobarycentre de la face $AJDKL$ et de O_2, isobarycentre de la face $ANBIJ$.
   (N.B. On laissera ces coordonnées sous la forme $x + y\sqrt{5}$ avec x et y rationnels).

   (b) Vérifier que $\overrightarrow{OO_1}$ définit un vecteur normal à la face $AJDKL$.

   (c) Montrer que la face $AJDKL$ du dodécaèdre est un pentagone régulier (on pourra utiliser la question $I.2$). Il en est de même pour les autres faces, ce que l'on admettra.

   (d) Déterminer par son cosinus l'angle (non orienté) des vecteurs $\overrightarrow{OO_1}$ et $\overrightarrow{OO_2}$.

Partie III. Matrice de Gram et isométries

1. On appelle *simplexe* un triplet de vecteurs $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ})$, déterminé par trois sommets consécutifs X, Y, Z de l'une des faces du dodécaèdre et pris dans un ordre tel que $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ})$ soit une base directe de E. Un tel simplexe est noté $[XYZ]$.
   Ainsi $[AJD]$ est un simplexe.
   Combien les sommets du dodécaèdre déterminent-ils de simplexes ?
2. On appelle *matrice de Gram* associée à un triplet $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ d'éléments de E la matrice :

$$Gram(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = [g_{i,j}]$$

   de coefficient générique $g_{i,j}$, $(i, j) \in [1..3]^2$, défini par :

$$\forall (i, j) \in [1..3]^2, g_{i,j} = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle$$

   Calculer la matrice de Gram associée au simplexe $[AJD]$; on donnera ses coefficients sous la forme $x + y\sqrt{5}$ avec x et y entiers.
   N.B. On pourra admettre que tous les simplexes définissent la même matrice de Gram, notée $\mathcal{G}$.
3. (a) Montrer qu'étant donné deux des simplexes précédents, soit $\mathcal{S} = [XYZ]$ et $\mathcal{S}' = [X'Y'Z']$, il existe un automorphisme $f_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}'}$ unique de E transformant le premier en le second.

   (b) Montrer que cet automorphisme est orthogonal, i.e. qu'il vérifie :

$$\forall \mathbf{u} \in E, \|f_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}'}(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$$

   On pourra utiliser l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(x, y, z) \mapsto \|x\overrightarrow{OX'} + y\overrightarrow{OY'} + z\overrightarrow{OZ'}\|^2$$

   en exprimant sa valeur à l'aide de la matrice $\mathcal{G}$ et de la matrice colonne :

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   (c) Montrer que $f_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}'}$ est une rotation.

   (d) On désigne par G l'ensemble des automorphismes directs de E conservant le dodécaèdre, considéré ici comme ensemble des vecteurs

$$\overrightarrow{OA}, \cdots, \overrightarrow{ON'}$$

   On pourra admettre que les faces du dodécaèdre sont transformées en des faces par les éléments de G.

   Montrer que G est un sous-groupe de $SO(E)$ de cardinal au plus égal à 60.

4. On considère les endomorphismes r, s et t de E définis par leurs matrices respectives dans la base $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b & -1 & a \\ 1 & a & -b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$T = SR = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & a & b \\ a & -b & 1 \\ b & 1 & a \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que r, s et t sont des rotations qu'on écrira sous la forme $Rot(\mathbf{u},\theta)$ en précisant $\mathbf{u}$ et θ dans chaque cas.
   N.B. On choisira dans chaque cas un vecteur $\mathbf{u}$ dont la troisième coordonnée soit positive et on désignera par Ω le milieu de AJ.

   (b) Dire brièvement ce que sont les effets respectifs de ces rotations sur le simplexe $[AJD]$.

   (c) Quels sont les ordres respectifs de ces rotations dans le groupe $SO(E)$?

5. (a) On donnera sous forme d'un tableau à double entrée à trois lignes et douze colonnes la liste des transformés respectifs de $ABCDIJKLMN$ par r, s et t (on ne fera pas figurer les éventuels calculs sur la copie).

   (b) Préciser comment obtenir simplement les transformés des dix autres points à l'aide du tableau précédent.

   (c) En déduire que r, s, t sont bien des éléments de G.

6. En mettant brièvement en évidence d'autres éléments de G analogues à r, s, t, en déduire que le cardinal de G est égal à 60.

Partie IV. Isomorphisme de G et de $\mathcal{A}_5$

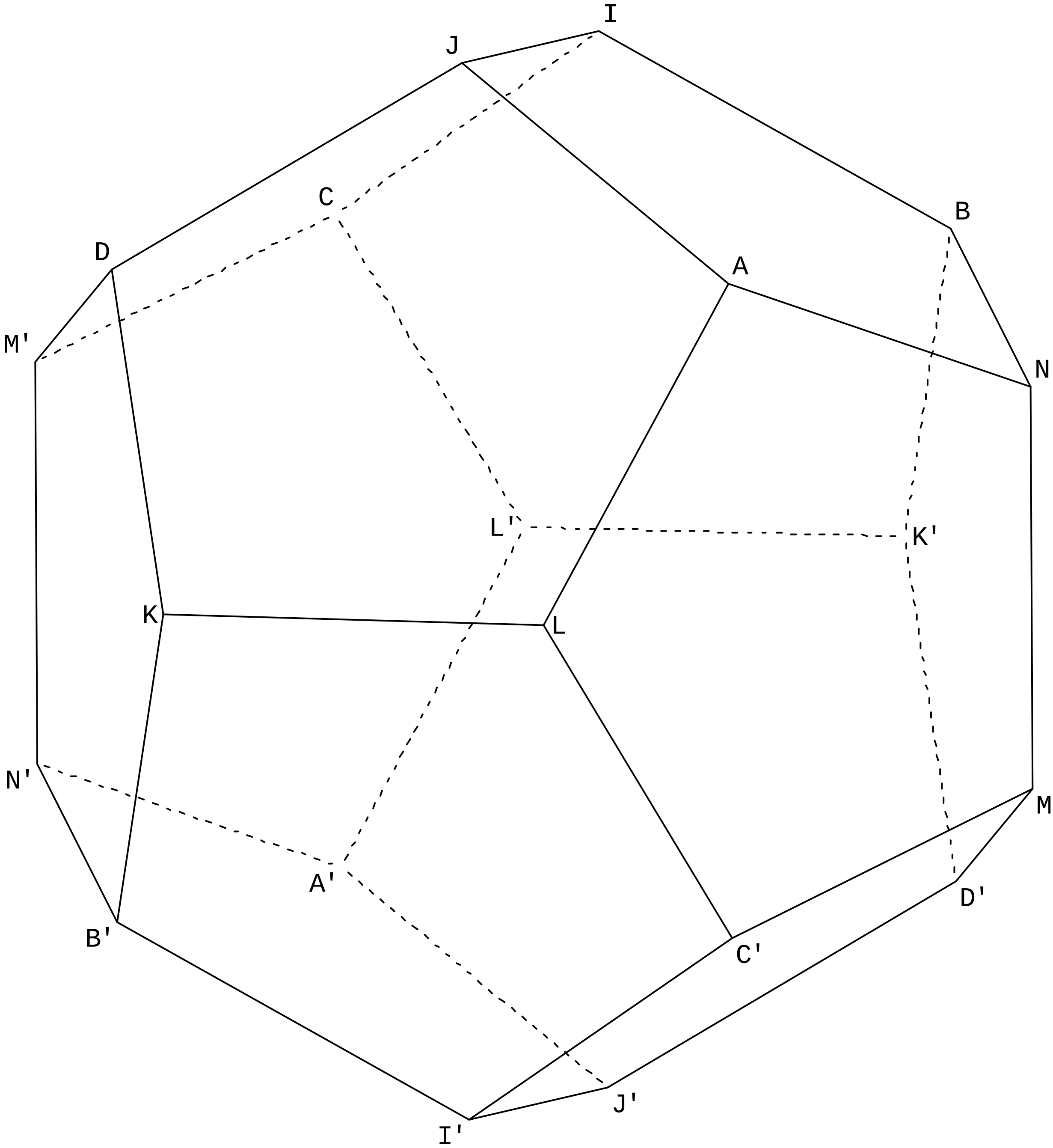
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La notation $\mathcal{S}_n$ désigne le groupe des permutations de l'ensemble $[1..n]$. ε désigne l'unique morphisme surjectif du groupe $\mathcal{S}_n$ sur le groupe multiplicatif à deux éléments $U_2 = \{-1, 1\}$ et qui prend la valeur -1 pour les transpositions. Si σ est un élément quelconque de $\mathcal{S}_n$, $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ.
La notation $\mathcal{A}_n$ désigne le groupe des permutations paires de l'ensemble $[1..n]$; c'est le noyau de ε.
Si p est un entier au moins égal à 2 et au plus égal à n, et si $a_1, a_2, \cdots, a_p$ sont des éléments distincts de $[1..n]$, la notation $(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ désigne le p-cycle envoyant a_i sur a_{i+1} pour i variant de 1 à $p-1$ et a_p sur a_1, les autres éléments étant fixes.
Ces notions et notations s'étendent au cas du groupe des permutations d'un ensemble quelconque fini non vide.
Si $ABCDE$ est un pentagone régulier, on appelle diagonale du pentagone tout segment déterminé par deux sommets non consécutifs ; ainsi, chaque pentagone régulier possède cinq diagonales.

1. Rappeler sans démonstration le cardinal de $\mathcal{A}_5$.
2. On appelle *f-diagonale* du dodécaèdre une diagonale de l'une quelconque des faces du dodécaèdre. Ainsi, AB, BD', KJ sont par exemple des f-diagonales. On désigne par $\mathcal{D}$ l'ensemble des f-diagonales.
   Quel est le cardinal de $\mathcal{D}$?

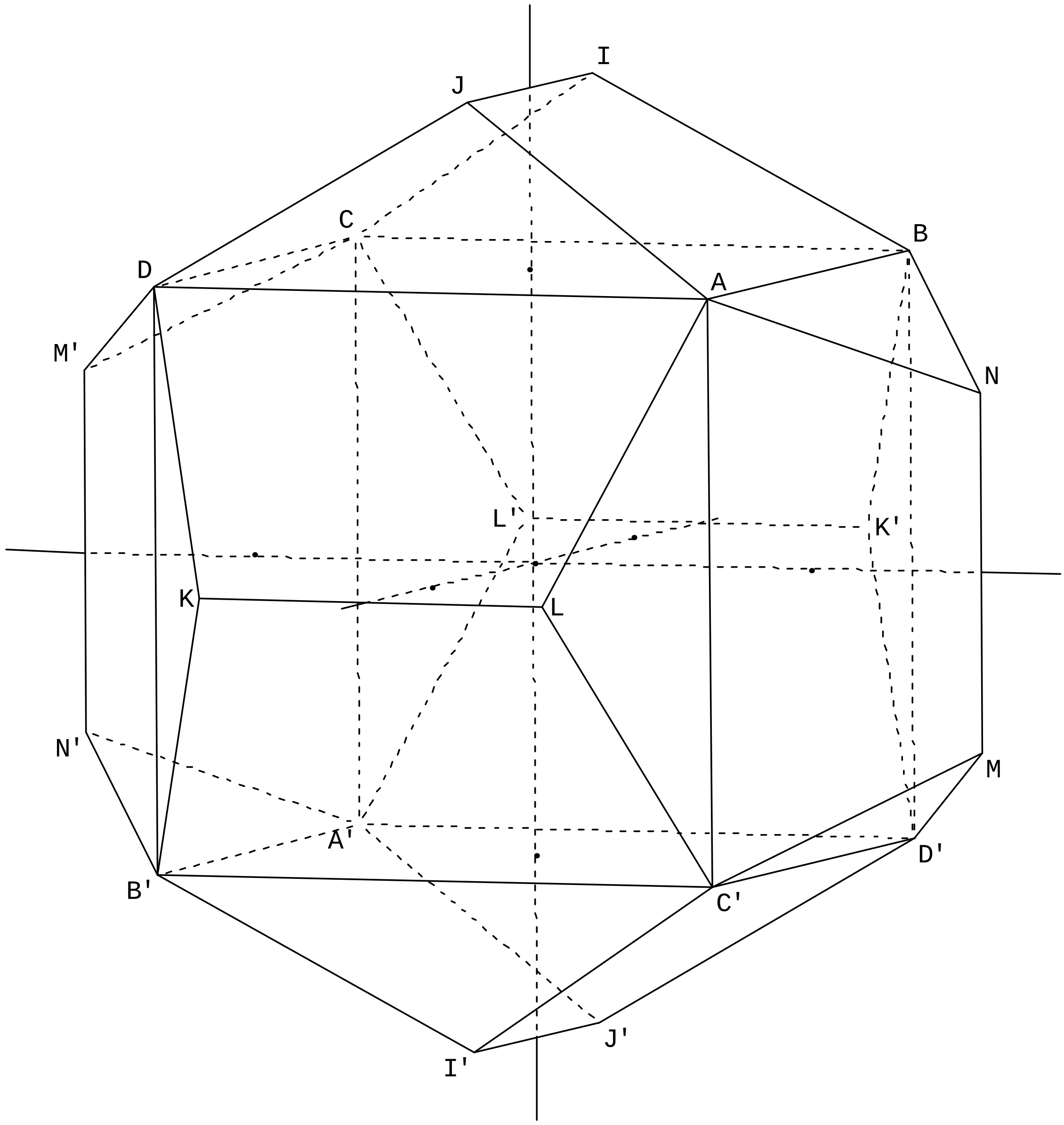
3. On met ici en évidence l'existence de cinq cubes inscrits dans le dodécaèdre. Le cube initial est noté $\mathcal{C}_0 = ABCDA'B'C'D'$.
   (a) On désigne par $\mathcal{C}_i, i = 1, 2, 3, 4$ le cube déduit de $\mathcal{C}_0$ par s^i. Montrer qu'on obtient ainsi cinq cubes distincts inscrits dans le dodécaèdre et que chaque arête de l'un de ces cinq cubes est un élément de $\mathcal{D}$.
   (b) Montrer que chaque élément de $\mathcal{D}$ est arête de l'un de ces cinq cubes et un seul (on pourra raisonner sur la seule f-diagonale AD).
   (c) En déduire que les cinq cubes $\mathcal{C}_i$ sont les seuls cubes de centre 0 et isométriques à $\mathcal{C}_0$ inscrits dans le dodécaèdre.
4. (a) Montrer que tout élément f de G permute l'ensemble $\mathcal{K}$ des cinq cubes précédents. On désigne par Φ l'application ainsi définie de G dans le groupe $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ des permutations de $\mathcal{K}$. On notera $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ l'ensemble des permutations paires de $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$.
   (b) Montrer que Φ est un morphisme de groupes.
   (c) Expliciter par un tableau à double entrée à trois lignes et cinq colonnes l'effet produit par r, s, t sur les cubes $\mathcal{C}_i, (i = 0, 1, 2, 3, 4)$.
   (d) Montrer que $\Phi(r), \Phi(s), \Phi(t)$ sont des permutations paires de $\mathcal{K}$.
5. (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le triplet $(f(\mathbf{i}), f(\mathbf{j}), f(\mathbf{k}))$ pour qu'un élément f de $SO(E)$ laisse le cube $\mathcal{C}_0$ globalement invariant (on pourra considérer les axes des faces de ce cube).
   (b) En déduire que le cardinal du sous-groupe G_0 de G constitué des isométries directes laissant globalement invariant le cube $\mathcal{C}_0$ (c'est le *stabilisateur* de $\mathcal{C}_0$ dans G) est égal à 12 et préciser l'ensemble de ses éléments.
   (c) Montrer que, pour tout i de 1 à 4, le stabilisateur G_i de $\mathcal{C}_i$ dans G est un sous-groupe de G isomorphe à G_0.
   (d) Préciser $G_0 \cap G_1$ puis $G_0 \cap G_1 \cap G_2$.
   En déduire que Φ est injectif.
6. (a) Soit S un sous-groupe de $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$; on note :

$$S_+ = S \cap \mathcal{A}_{\mathcal{K}} \quad et \quad S_- = S \cap (\mathcal{S}_{\mathcal{K}} \setminus \mathcal{A}_{\mathcal{K}})$$

   Montrer que, si S_- est non vide, alors S_+ et S_- ont même cardinal ; en déduire que, si $\Phi(G)$ possède un élément impair, alors il en contient nécessairement 30.
   (b) Montrer que, si f est un élément de G tel que : $\varepsilon(\Phi(f)) = -1$, alors f est d'ordre pair dans G.
   (c) En déduire, en utilisant les ordres des éléments de G, étudiés dans $III.6$, que G est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.
7. Combien y a-t-il d'éléments de G transformant l'un quelconque des cinq cubes en un autre ?



Le dodécaèdre construit au **II**



Construction du dodécaèdre

4.2 Corrigé de la première épreuve écrite

Préambule

1. La condition ${}^tM \cdot M = I_3$ se traduit par : les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, soit 6 conditions portant sur les vecteurs colonnes de M :

$$\forall j = 1, 2, 3, \sum_{i=1}^{3} m_{i,j}^2 = 1$$

$$\forall (j,k) \in [1..3]^2, ((j \neq k) \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} m_{i,j} m_{i,k} = 0)$$

Ces conditions sont équivalentes à celles obtenues à l'aide des vecteurs-lignes. M est de plus directe ssi $\det\ M = 1$.

2. On trouve un vecteur $\mathbf{u}$ en cherchant un vecteur propre pour f associé à la valeur propre 1 ; le sous-espace propre associé est en effet ici nécessairement de dimension 1.
Si f n'est pas un demi-tour, i.e. $tr\ f \neq -1$, on peut aussi étudier la matrice antisymétrique $M -^t M$ et récupérer un vecteur $\mathbf{u}$ par les moyens habituels relatifs aux endomorphismes antisymétriques.
3. Dans une base orthonormée directe convenable, $f = Rot(\mathbf{u}, \theta)$ est représentée par :

$$M' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc $tr\ f = tr\ M' = 1 + 2\cos\theta$; f est un demi-tour ssi $tr\ f = -1$.
4. Représentons f par la matrice M' ci-dessus, le troisième vecteur-base étant unitaire, colinéaire à $\mathbf{u}$ et de même sens.
Si $\mathbf{v}$ a pour coordonnées (x_1, x_2, x_3) le produit mixte $(\mathbf{v}, f(\mathbf{v}), \mathbf{u})$ est égal à :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1\cos\theta - x_2\sin\theta & 0 \\ x_2 & x_1\sin\theta + x_2\cos\theta & 0 \\ x_3 & x_3 & \|u\| \end{vmatrix} = (x_1^2 + x_2^2)\|u\| \sin\theta$$

qui est non nul car f n'est pas un demi-tour (donc $\sin\theta \neq 0$) et que $\mathbf{v}$ n'est pas colinéaire à $\mathbf{u}$ (donc $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$) ; ce produit mixte est de plus du signe de $\sin\theta$.

Première partie

1. On suppose $r = 1$ et on pose $a' = \cos\dfrac{2\pi}{5}$.
   (a) a' est la partie réelle de ω ; on a :

$$\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = \frac{\omega^5 - 1}{\omega - 1} = 0$$

soit en divisant par ω^2 et tenant compte de $\overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega}$:

$$1 + (\omega + \overline{\omega}) + (\omega^2 + \overline{\omega}^2) = 0$$

Compte tenu de $\cos\dfrac{4\pi}{5} = 2a'^2 - 1$, il vient :

$$4a'^2 + 2a' - 1 = 0$$

Sachant que a' est positif, il vient :

$$a' = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

(b) On a alors :

$$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad b = \frac{1}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$a^2 + a - 1 = 0 \quad \textit{et} \quad b^2 - b - 1 = 0$$

(c) a et b sont connus et $ab = 1$; on a aussi : $a + b = \sqrt{5} \quad b - a = 1 \quad a^2 + b^2 = 3$.

(d) On a : $\|\overrightarrow{A_0A_1}\| = 2\sin\dfrac{\pi}{5}$ et $\|\overrightarrow{A_0A_2}\| = 2\sin\dfrac{2\pi}{5}$. Le rapport :

$$p = \frac{\|\overrightarrow{A_0A_2}\|}{\|\overrightarrow{A_0A_1}\|}$$

est égal à $2\cos\dfrac{\pi}{5} = -2\cos\dfrac{4\pi}{5} = -2(2\cos^2\dfrac{2\pi}{5} - 1) = -2(2a'^2 - 1) = -a^2 + 2 = a + 1 = b$.
On a donc $p = b$.

(e) $\|\overrightarrow{A_0A_1}\|^2 = 4\sin^2\dfrac{\pi}{5} = 2(1 - \cos\dfrac{2\pi}{5}) = 2 - a = \dfrac{10 - 2\sqrt{5}}{4}$. On a donc :

$$\|\overrightarrow{A_0A_1}\| = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

2. Les deux conditions sont clairement nécessaires par homothétie de centre O et de rapport r en utilisant les résultats de 1.e.
Supposons réciproquement ces conditions réalisées. Elles ne sont pas suffisantes puisque le pentagone croisé proposé comme exemple n'est pas régulier au sens de l'énoncé (la seule origine possible est l'isobarycentre des points, i.e. O lui-même, et on ne peut avoir les affixes sous la forme voulue). Posons :

$$\mathbf{i} = \frac{\overrightarrow{OM_0}}{\|\overrightarrow{OM_0}\|}$$

Soit $\mathbf{j}$ orthogonal à $\mathbf{i}$ et unitaire et tel que M_1 ait une ordonnée strictement positive dans le repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$; on remarque en effet qu'il est impossible que O, M_0, M_1 soient alignés, sinon on aurait $\|\overrightarrow{M_0M_1}\| = 2r$.
Si M a pour affixe $r\mathbf{e}^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, \pi]$, on a : $\|\overrightarrow{M_0M}\| = 2r\sin\dfrac{\theta}{2}$; la fonction $\theta \mapsto \|\overrightarrow{M_0M}\|$ est alors une fonction strictement croissante de θ, qui ne prend la valeur $\dfrac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ que si $\theta = \dfrac{2\pi}{5}$; dans le repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ considéré comme direct, on a donc :

$$(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{2\pi}{5}$$

On continue de même, sachant que les points sont distincts.
D'où le résultat.

3. (a) Soit $f \in \Gamma$; l'isobarycentre O des cinq points est fixe par f, qui est donc une rotation de centre O ou l'identité. Les sommets sont nécessairement permutés entre eux (ils sont en nombre fini) et $f^{-1} \in \Gamma$. De plus, Γ est stable par composition. C'est donc un sous-groupe de $Isom_+(\mathcal{P})$. L'image par une telle rotation f de M_0 est l'un des points M_k et ce choix définit une application f et une seule. Γ possède donc cinq éléments qui sont les rotations de centre O et d'angle $\dfrac{2k\pi}{5}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

   (b) L'application de Γ dans $SO(E)$ qui à tout déplacement associe sa partie linéaire est la restriction à Γ d'un morphisme de groupes ; c'est ici un isomorphisme puisque Γ ne contient pas de translation. Γ est isomorphe au sous-groupe de $SO(E)$, composé des cinq rotations d'angle $\dfrac{2k\pi}{5}$, avec $k = 0, 1 \cdots 4$.

   (c) Γ est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, qui est cyclique d'ordre 5 et, comme 5 est premier, il est engendré par l'un quelconque de ses éléments distincts de 1_E.

Deuxième partie

1. (a) On a, avec les conditions de l'énoncé : $\|\overrightarrow{JA}\|^2 = 4a^2$ d'où : $(1-a)^2 + 1 + (1-b')^2 = 4a^2$ soit : $b'^2 - 2b' + a = 0$ ou encore $(b'-1)^2 = 1 - a = a^2$; sachant que $b' > 1$, il vient $b' = 1 + a = b$. On a alors :
$$\|\overrightarrow{JA}\| = \|\overrightarrow{JD}\| = 2a$$

   (b) On en déduit les coordonnées :
$$J = (a, 0, b) \quad I = (-a, 0, b) \quad I' = (a, 0, -b) \quad J' = (-a, 0, -b)$$

2. K appartient au plan médiateur de $B'D$ i.e. Oxy.
Si $(\alpha, -\beta, 0)$ sont les coordonnées de K, celles de L sont $(\alpha, \beta, 0)$; la condition $\overrightarrow{KL} = 2a\mathbf{j}$ entraîne $\beta = a$.
Il vient alors comme en $II.1.a$: $\alpha = b$; d'où :
$$K = (b, -a, 0) \quad L = (b, a, 0) \quad K' = (-b, a, 0) \quad L' = (-b, -a, 0)$$
et de même :
$$M = (0, b, -a) \quad N = (0, b, a) \quad M' = (0, -b, a) \quad N' = (0, -b, -a)$$

3. Le plan AJD a une équation du type $\lambda(z-1) + x - 1 = 0$; en écrivant qu'il contient J, on arrive à $\lambda = a$; d'où l'équation : $x + az - b = 0$.
Il est alors immédiat de vérifier que K et L appartiennent à ce plan.
On trouve de même comme équation du plan $ANBIJ$: $ay + z - b = 0$.

4. (a) Un calcul barycentrique immédiat fournit les coordonnées de O_1 et de O_2 :
$$O_1 = (\frac{5+3\sqrt{5}}{10}, 0, \frac{5+\sqrt{5}}{10}) \quad O_2 = (0, \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5+3\sqrt{5}}{10})$$

   (b) On vérifie que $\overrightarrow{OO_1} = \lambda \mathbf{u}_1$ avec :
$$\lambda = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$$
et $\mathbf{u}_1 = (1, 0, a)$, vecteur orthogonal au plan $AJDKL$, ce qui signifie que O_1 est la projection orthogonale de O sur la face $AJDKL$.

(c) Les distances $\|OA\|, \|OJ\|, \|OD\|, \|OK\|, \|OL\|$ sont toutes égales à $\sqrt{3}$ (calcul immédiat) ; d'après la question précédente, les distances $\|O_1A\|, \|O_1J\|, \cdots, \|O_1L\|$ sont donc aussi égales.
On obtient après calcul :

$$\|O_1A\| = r = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$$

Le calcul de $\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ donne alors $2a$, ce qui correspond aux distances $\|AJ\|, \|JD\|, \|DK\|, \|KL\|, \|$
En utilisant $I.2$, on voit que les points $AJDKL$ définissent un pentagone régulier.

(d) Les vecteurs $\overrightarrow{OO_1}$ et $\overrightarrow{OO_2}$ sont respectivement colinéaires et de même sens que les vecteurs $\mathbf{u}_1 = (1, 0, a)$ et $\mathbf{u}_2 = (0, a, 1)$; si on désigne par α l'angle (bien entendu non orienté) de ces deux vecteurs, on obtient en effectuant le produit scalaire : $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Troisième partie

1. Chaque face fournit cinq simplexes et il y a 12 faces. Un même simplexe ne peut être obtenu à partir de deux faces distinctes ; il y a donc 60 simplexes.
2. On calcule les produits scalaires deux à deux et on obtient :

$$Gram(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OD}) = \begin{pmatrix} 3 & a+b & 1 \\ a+b & 3 & a+b \\ 1 & a+b & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{5} & 1 \\ \sqrt{5} & 3 & \sqrt{5} \\ 1 & \sqrt{5} & 3 \end{pmatrix}$$

3. (a) Il existe f unique dans $GL(E)$ envoyant une base sur une autre.

   (b) Soit $\mathbf{u} \in E$ et soient $[XYZ]$ et $[X'Y'Z']$ deux simplexes f étant l'unique automorphisme de E envoyant terme à terme le premier sur le second. Soit enfin U la matrice colonne des coordonnées de $\mathbf{u}$ dans la base $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ})$. On peut poser :

$$\mathbf{u} = x\overrightarrow{OX} + \cdots + z\overrightarrow{OZ}$$

$$\|f(\mathbf{u})\|^2 = \|x\overrightarrow{OX'} + \cdots + z\overrightarrow{OZ'}\|^2 = {}^tU\mathcal{G}U = \|x\overrightarrow{OX} + \cdots + z\overrightarrow{OZ}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2$$

   f est donc une isométrie.

   (c) Comme il s'agit d'envoyer une base directe sur une autre, f est une isométrie directe, i.e. une rotation.

   (d) Le dodécaèdre est un ensemble fini ; si f est élément de G, f^{-1} l'est donc aussi. La stabilité étant claire, il s'agit d'un sous-groupe de $GL(E)$.

   Soit f un automorphisme conservant le dodécaèdre ; les faces sont transformées en des faces car il est clair que les faces sont des plans d'appui ; de même trois sommets consécutifs sont transformés en trois sommets consécutifs (considérer la conservation des distances). Comme l'orientation doit être conservée, tout simplexe doit donc être transformé en un simplexe et on sait qu'une telle condition définit une rotation unique.
   G possède donc au plus 60 éléments.
   Il reste alors à voir que les 60 rotations précédentes sont bien des éléments de G.

4. (a) On vérifie facilement sur leurs coefficients que les matrices R et S sont orthogonales directes. T l'est alors aussi nécessairement en tant que produit des deux premières. r est clairement la rotation autour de $\overrightarrow{OA}$ d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

On vérifie que $\overrightarrow{OO_1}$ est invariant par s ; le calcul de la trace et un argument relatif à l'orientation permettent d'affirmer que s est la rotation $Rot(\overrightarrow{OO_1}, \dfrac{2\pi}{5})$.

t est la composée des deux précédentes ; c'est en fait le demi-tour d'axe $\overrightarrow{O\Omega}$, où Ω désigne le milieu de AJ.

(b) Effet de r, s, t sur le simplexe $[AJD]$:

$$r([AJD]) = [ALC']$$

$$s([AJD]) = [JDK]$$

$$t([AJD]) = [JAN]$$

(c) Les ordres respectifs de r, s, t dans G sont 3,5 et 2.

5. (a) L'effet de r, s, t sur les sommets $A, B, C, D, I, J, K, L, M, N$ est donné par le tableau suivant :

$***$	A	B	C	D	I	J	K	L	M	N
r	A	D	B'	C'	K	L	M	N	I	J
s	J	C	N'	K	M'	D	L	A	B	I
t	J	K	C'	N	L	A	B	I	M'	D

(b) Si X est l'un des autres points, il s'écrit $-1_E(Y)$, où Y est l'un des dix points précédemment étudiés ; comme -1_E appartient au centre de $O(E)$, on a :

$$\forall f \in G, f(X) = f \circ (-1_E)(Y) = -f(Y)$$

On obtient donc les résultats manquants en échangeant systématiquement les X et les X' dans le tableau précédent, soit :

$***$	A'	B'	C'	D'	I'	J'	K'	L'	M'	N'
r	A'	D'	B	C	K'	L'	M'	N'	I'	J'
s	J'	C'	N	K'	M	D'	L'	A'	B'	I'
t	J'	K'	C	N'	L'	A'	B'	I'	M	D'

(c) On voit sur les tableaux précédents que les 20 sommets sont bien permutés par r, s et t.

6. Chaque paire de faces opposées définit quatre rotations d'ordre 5, soit vingt-quatre rotations en tout.
Chaque paire de sommets opposés définit deux rotations d'ordre 3, soit vingt rotations en tout.
Chaque paire d'arêtes opposées définit un demi-tour, soit quinze demi-tours.
En rajoutant 1_E, celà fait soixante rotations, i.e. le maximum prévu par $III.3.e$. On peut donc conclure :

$$card\, G = 60$$

Quatrième partie

1. On sait que $card\, \mathcal{A}_5 = 60$.
2. Chaque face détermine 5 f-diagonales ; donc $card\, \mathcal{D} = 60$.

3. (a) En s'aidant des tableaux de III, on peut obtenir de même en transformant le cube $\mathcal{C}_0$ par s successivement :

$\mathcal{C}_0$	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
$\mathcal{C}_1$	J	C	N'	K	J'	C'	N	K'
$\mathcal{C}_2$	D	N'	I'	L	D'	N	I	L'
$\mathcal{C}_3$	K	I'	M	A	K'	I	M'	A'
$\mathcal{C}_4$	L	M	B	J	L'	M'	B'	J'

L'image d'un cube inscrit en est un autre ; chaque arête de $\mathcal{C}_0$ est transformée par les puissances de s en une arête d'un autre cube et toutes les arêtes de ces cubes sont des f-diagonales du dodécaèdre.

(b) On remarque que AD n'est une arête que de $\mathcal{C}_0$.

(c) Soit $\mathcal{C}'$ un cube inscrit ayant même longueur d'arête que les précédents et même centre ; ses arêtes sont nécessairement des f-diagonales (seule façon de retrouver des paires de points dont la distance est 2) ; pour chaque f-diagonale, il existe un cube $\mathcal{C}_i$ admettant cette f-diagonale comme arête.
Si $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}_i$ ont une arête commune, par exemple AD, les autres sommets ne peuvent se trouver que dans les plans orthogonaux d'équation $y = \pm 1$; il ne peut alors s'agir que du cube $\mathcal{C}_0$ car B, C, D, B', C', D' sont les seuls sommets du dodécaèdre dans ces plans.

4. (a) On a déterminé tous les cubes de centre O et d'arêtes de longueur 2 inscrits dans le dodécaèdre et il y en a un nombre fini (à savoir 5).
On peut donc dire que G permute les éléments de $\mathcal{K}$.

(b) C'est clair par restriction à l'ensemble des sommets.

(c) A l'aide des tableaux précédents on peut voir comment les cubes sont permutés par r, s et t :

$***$	$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_4$
r	$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_2$
s	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_0$
t	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_3$

(d) $\Phi(r)$ est un 3-cycle ; $\Phi(s)$ est un 5-cycle ; $\Phi(t)$ est un produit de deux transpositions disjointes.
Ce sont donc des permutations paires de $\mathcal{K}$.

5. (a) $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ est un repère orthonormé direct formé de vecteurs orthogonaux aux faces de $\mathcal{C}_0$; si $f \in G$, il en est de même de $(f(\mathbf{i}), f(\mathbf{j}), f(\mathbf{k}))$.
Il y a six choix possibles pour $f(\mathbf{i})$, quatre pour $f(\mathbf{j})$ une fois ce choix fait et un seul pour $f(\mathbf{k})$.

(b) On détermine ainsi 24 éléments de $SO(E)$ et ils conservent $\mathcal{C}_0$.
Ces éléments sont :
– les huit rotations du type $Rot(\overrightarrow{OA}, \pm\frac{2\pi}{3})$
– les trois demi-tours du type $Rot(\mathbf{k}, \pi)$
– les six rotations du type $Rot(\mathbf{k}, \pm\frac{\pi}{2})$
– les six demi-tours du type $Rot(\mathbf{i}+\mathbf{j}, \pi)$
Seuls les 11 premiers éléments de cette liste (ainsi que 1_E) sont dans G. On a donc $card\ G_0 = 12$ (c'est en fait le groupe des rotations du tétraèdre régulier, isomorphe à $\mathcal{A}_4$).

(c) Soit $f \in G$ et $i \in [1..4]$. On a alors :

$$f \in G_i \iff f(\mathcal{C}_i) = \mathcal{C}_i \iff f \circ s^i(\mathcal{C}_0) = s^i(\mathcal{C}_0) \iff f \in s^i G_0 s^{-i}$$

G_i est donc un sous-groupe conjugué de G_0 ; il lui est donc isomorphe.

(d) Etudions $G_0 \cap G_1$; il contient 1_E et les deux rotations $Rot(\overrightarrow{OC}, \pm\dfrac{2\pi}{3})$; c'est un sous-groupe à trois éléments ; il est immédiat que $G_0 \cap G_1 \cap G_2$ est réduit à l'identité.
Si f laisse globalement invariant l'ensemble des cinq cubes, c'est donc 1_E ; on a ainsi prouvé que Φ est injectif.

6. (a) $\Phi(G)$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ à 60 éléments.
Supposons qu'il contienne un élément impair σ. Posons $S_0 = \Phi(G) \cap \mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ et $S_1 = \Phi(G) \cap (\mathcal{A}_{\mathcal{K}} \setminus \mathcal{A}_{\mathcal{K}})$; l'application définie par : $\rho \mapsto \sigma \circ \rho$ est une bijection de S_0 sur S_1. Il en résulte que $\Phi(G)$ contient alors nécessairement 30 éléments impairs.
il en contient alors nécessairement 30. En effet, l'application de

(b) Si $f \in G$ et vérifie $\varepsilon(\Phi(f)) = -1$, alors f est nécessairement d'ordre pair dans G car $f^q = 1_E$ entraîne $(-1)^q = 1$; on aurait donc au moins 30 éléments d'ordre pair dans G.

(c) Or, G contient 44 éléments d'ordre impair (cf. $III.6$). L'existence d'un élément impair dans $\Phi(G)$ conduit donc à une impossibilité et on doit donc conclure que l'image de G par Φ ne contient que des éléments pairs.

En conséquence, Φ est un isomorphisme de G sur $\mathcal{A}_5$.

7. Soit $f \in G$ et soit $(i, j) \in [0..4]^2$ tel que $i < j$. On a alors :

$$f(\mathcal{C}_i) = \mathcal{C}_j \Longleftrightarrow f(\mathcal{C}_i) = s^{j-i}(\mathcal{C}_i) \Longleftrightarrow f \in s^{j-i} G_i$$

On en conclut qu'il existe 12 éléments transformant $\mathcal{C}_i$ en $\mathcal{C}_j$ (cf. $IV.5.c$).

4.3 Commentaires sur la première épreuve écrite

L'objet du problème était l'étude du groupe des rotations du dodécaèdre ; ce groupe, qui compte soixante éléments, se trouve être isomorphe au groupe alterné $\mathcal{A}_5$. C'est ce que l'on peut voir en s'intéressant aux cinq cubes isométriques inscriptibles dans le dodécaèdre. Le lecteur à la recherche d'informations plus complètes pourra consulter l'ouvrage « Groupes, Algèbre et Géométrie » de J.M. Arnaudiès et José Bertin (éditions Ellipses), qui contient d'ailleurs un dessin représentant le dodécaèdre et ses cinq cubes.
Notons au passage que ce qui concerne le dodécaèdre se retrouve sur l'icosaèdre, que l'on forme à l'aide des douze centres de faces du dodécaèdre.

Préambule

Ce préambule était destiné à permettre au candidat de mobiliser ses connaissances sur les matrices orthogonales directes d'ordre 3 et de lui donner les moyens de retrouver rapidement les éléments caractéristiques de la rotation associée.
On peut regretter que beaucoup de candidats fassent preuve de peu d'assurance sur ces notions, un certain nombre d'entre eux se limitant, par exemple, à la condition $\det\ A = 1$.
Il y a aussi parfois confusion de vocabulaire entre matrices semblables et matrices équivalentes.
La recherche de l'axe d'une rotation f qui n'est pas un demi-tour peut être simplifiée par l'étude de l'endomorphisme antisymétrique $f - f^*$. L'énoncé (déjà suffisamment long ...) ne cherchait pas à entraîner le lecteur jusque là. Ce fait était cependant connu de quelques candidats, ainsi qu'ils ont pu le montrer à la question III.4.

Première partie

1. Cette première question avait pour objet de mettre en place les éléments nécessaires aux calculs futurs. Il avait été choisi de garder les deux symboles a et b, malgré la relation simple $ab = 1$ qui les lie, afin d'éviter un recours trop fréquent aux fractions.
   Encore valait-il mieux s'apercevoir rapidement de l'égalité $p = b$, par exemple en utilisant au mieux les équations du second degré dont a et b sont racines, faute de quoi de nombreux calculs ultérieurs se trouvaient rendus plus pénibles. Notons au passage que b n'est autre que le nombre d'or.
2. Il s'agissait ici de préparer le terrain pour prouver que les faces du doécaèdre construit sont bien des pentagones réguliers (question II.4.c). Un bon nombre de candidats ont bien vu la difficulté et sont parvenus à la résoudre, sans toujours d'ailleurs suivre la proposition de l'énoncé (on pouvait aussi utiliser la relation dite d'Al-Kachi).
3. Cette question était aussi simple qu'incontournable ; il fallait bien entendu mettre en évidence les quatre rotations en plus de l'identité, le b) étant destiné à se ramener au groupe orthogonal par le transfert de structure affine-vectoriel, qui se trouve être ici immédiat puisqu'il s'agit de rotations de même centre.

Deuxième partie

Là encore, il était souhaitable de réaliser le plus tôt possible la relation $b' = b$.
La recherche de l'équation du plan AJD est immédiate à l'aide de la notion de faisceau de plans ; il suffit ensuite de vérifier l'appartenance à ce plan des points K et L.
Les candidats ont souvent fait preuve d'une grande maladresse dans ces calculs qui pouvaient pourtant être réalisés de manière très économique.

De même, il est bon de savoir qu'on lit directement sur une équation de plan telle que $x + az = b$ les coordonnées d'un vecteur normal $(1, 0, a)$.
Le fait que OO_1 soit orthogonal à la face $AJDKL$ ne saurait se ramener à son orthogonalité avec **un** vecteur de ce plan.
La question de prouver que la face $AJDKL$ est bien un pentagone régulier a donné lieu à une bévue maintes fois répétée : le fait que O_1 soit l'isobarycentre des cinq points n'assure en rien qu'il s'agisse du centre d'un cercle passant par les cinq points.
Il était par ailleurs possible, en utilisant le théorème de Pythagore, de rédiger cette question à l'économie.
Le calcul demandé de l'angle entre deux faces adjacentes a donné lieu aussi à des calculs le plus souvent trop lourds.

Troisième partie

L'évaluation du nombre de simplexes a été en général correcte ; on a pourtant pu lire le nombre 6^{30}, qui est de l'ordre de grandeur du nombre d'Avogadro ! L'utilisation de la matrice de Gram a été bien réalisée par un certain nombre de candidats. Par contre, beaucoup ne semblent pas avoir vu pourquoi cette première partie de l'étude ne fournissait qu'une inégalité : la rotation envoyant un simplexe sur un autre ne conserve pas a priori nécessairement le dodécaèdre ; la fin de cette partie avait pour but de le justifier.
L'étude des rotations r, s, t passe par celle des matrices correspondantes ; s'il est nécessaire de vérifier brièvement que R est S sont orthogonales directes, pour T, c'est immédiat puisque $T = SR$.
Certains candidats, qui ont mené laborieusement leurs calculs dans ces questions ne semblent pas avoir pris le temps d'utiliser les dessins fournis pour soutenir leur imagination.
La question 6 avait pour objet de mettre en évidence brièvement les soixante éléments de G et le dessin fourni par l'énoncé pouvait y aider ; cette question a donné lieu à de nombreux calculs de dénombrements inexacts.

Quatrième partie

La rotation s permet de mettre en évidence cinq cubes mais il faut s'assurer qu'il n'y en a pas d'autres, ce qui était l'objet des questions 2 et 3.
Ces dernières questions ont été peu abordées, le problème étant il est vrai un peu long.
Remarquons que si on ne s'en tient pas aux isométries directes, le groupe des isométries conservant le dodécaèdre est de cardinal 120, cardinal qui est aussi celui du groupe symétrique $\mathcal{S}_5$ (il suffit de composer les éléments de G avec -1_E).
Cependant, il n'y a pas ici isomorphisme, ainsi qu'on s'en rend compte par la remarque suivante : l'isométrie (indirecte) correspondant à la matrice $-S$ est d'ordre 10 mais le groupe $\mathcal{S}_5$ ne contient que des éléments d'ordre 2,3,4,5 ou 6 (on le voit en étudiant les décompositions en cycles disjoints possibles).

D'une manière générale, on peut dire qu'un certain nombre de copies ont fait bonne impression en cultivant parallèlement la rigueur des raisonnements et le pouvoir de l'imagination,tandis que d'autres, malheureusement assez nombreuses, se sont réduites à une succession de calculs maladroits, voire stériles ou confus.

5 Deuxième épreuve écrite

5.1 Énoncé de la deuxième épreuve écrite

I. **Préambule**

L'objet de ce problème est d'établir l'existence de sous-espaces vectoriels fermés invariants pour certaines classes d'opérateurs linéaires sur l'espace des séries de carré sommable. Le cas des espaces réels est considéré dans les quatre premières parties. Les deux dernières parties concernent le cas complexe.

On notera $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ l'ensemble des entiers naturels, des entiers relatifs, des nombres réels et des nombres complexes respectivement. $\mathbf{R}^+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une famille de nombres réels ou complexes indexée par $\mathbf{Z}$, telle que les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} |u_{-n}|$$

soient convergentes. On écrit alors que

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} |u_n| < \infty$$

et de plus l'on note

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}.$$

Les quatre premières parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

I. **Distance à un convexe fermé**

On note $l^2(\mathbf{Z})$ l'espace vectoriel réel des suites $x = (x_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de nombres réels indexées par $\mathbf{Z}$ telles que

$$\|x\| = \left[\sum_{k\in\mathbf{Z}} x_k^2\right]^{1/2} < \infty.$$

On rappelle que la fonctionnelle définie ci-dessus est une norme sur l'espace $l^2(\mathbf{Z})$. Pour $x \in l^2(\mathbf{Z})$ et $y \in l^2(\mathbf{Z})$, on pose

$$< x, y >= \sum_{k\in\mathbf{Z}} x_k y_k.$$

On admettra sans justification que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $l^2(\mathbf{Z})$.

1. Soient u et v deux éléments de $l^2(\mathbf{Z})$. Montrer que

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

2. L'objet de cette question est de montrer que l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ est complet pour la norme définie ci-dessus. Soit $(v(n))_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy d'éléments de $l^2(\mathbf{Z})$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tel que si $n, l \geqslant N(\varepsilon)$, alors

$$\|v(n) - v(l)\| \leqslant \varepsilon.$$

a) Montrer qu'alors on a, pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et tous $n, l \geqslant N(\varepsilon)$

$$|v(n)_k - v(l)_k| \leqslant \varepsilon.$$

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} v(n)_k = v_k$ existe pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

c) Montrer qu'il existe $K \in \mathbf{N}$ tel que

$$\left[\sum_{|k|\geqslant K} v(N(\varepsilon))_k^2\right]^{1/2} \leqslant \varepsilon.$$

d) Montrer que pour tout $L \geqslant K$, on a

$$\left[\sum_{L\geqslant|k|\geqslant K} v_k^2\right]^{1/2} \leqslant 3\varepsilon.$$

e) En déduire que l'on a $v \in l^2(\mathbf{Z})$, que

$$\lim_{n\to\infty} \|v(n) - v\| = 0$$

et donc que l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|$.

3. Soit C un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de $l^2(\mathbf{Z})$. Soit $(v(n))_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de C telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|v(n)\| = d$$

où $d = \inf\{\ \|v\|\ ;\ v \in C\}$.

a) Montrer que pour tous $n, l \in \mathbf{N}$, on a

$$\left\|\frac{1}{2}(v(n) - v(l))\right\|^2 \leqslant \frac{1}{2}(\|v(n)\|^2 + \|v(l)\|^2) - d^2.$$

b) Montrer qu'il existe un unique point $v \in C$ tel que $\|v\| = d$.

4. On note ∂C la frontière de C, c'est-à-dire l'intersection de C et de l'adhérence de son complémentaire $l^2(\mathbf{Z})\backslash C$. On suppose dans cette question que C est un sous-ensemble convexe fermé non vide de $l^2(\mathbf{Z})$, différent de l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ tout entier et du singleton $\{0\}$.

a) Montrer que l'ensemble $\partial C\backslash\{0\}$ est non vide.

b) Montrer qu'il existe $v \in l^2(\mathbf{Z})$ tel que

$$0 < \inf\{\|v - x\|\ ;\ x \in C\ \} < \|v\|.$$

c) En déduire qu'il existe $p \in \partial C \backslash \{0\}$ tel que

$$\|v-p\| = \inf\{\|v-x\| \ ; \ x \in C\ \}.$$

d) Montrer que pour tout $q \in C$, on a

$$< v-p, q-p > \leqslant 0.$$

II. **Exponentielles d'opérateurs**

1. Soit T une application linéaire de l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ dans lui-même. Montrer l'équivalence des trois conditions suivantes :

(i) T est une application continue en tout point de $l^2(\mathbf{Z})$;

(ii) T est continue en 0 ;

(iii) l'ensemble $\{\|T(x)\|;\ \|x\| \leqslant 1\}$ est un sous-ensemble borné de $\mathbf{R}$.

On désigne par $L(l^2(\mathbf{Z}))$ l'ensemble des applications linéaires continues de $l^2(\mathbf{Z})$ dans lui-même. Pour $T \in L(l^2(\mathbf{Z}))$, on pose $\|T\|_L = \sup\{\|T(x)\|;\ \|x\| \leqslant 1\}$.

2. a) Montrer que $L(l^2(\mathbf{Z}))$ est un espace vectoriel et que la fonctionnelle $\|\cdot\|_L$ est une norme sur $L(l^2(\mathbf{Z}))$.

b) Soit $(T_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy dans l'espace $L(l^2(\mathbf{Z}))$ normé par $\|\cdot\|_L$. Montrer que pour tout $x \in l^2(\mathbf{Z})$, la suite $(T_n(x))_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy de $l^2(\mathbf{Z})$.

c) En déduire que l'espace $L(l^2(\mathbf{Z}))$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_L$.

3. Soient S et $T \in L(l^2(\mathbf{Z}))$. On note TS l'élément de $L(l^2(\mathbf{Z}))$ obtenu en composant S avec T ; on a donc $TS = T \circ S$. Soit $I \in L(l^2(\mathbf{Z}))$ l'application identité définie par $I(x) = x$ pour tout $x \in l^2(\mathbf{Z})$. Pour tout $T \in L(l^2(\mathbf{Z}))$, on définit T^j par récurrence sur $j \in \mathbf{N}$, par $T^0 = I$ et $T^{j+1} = TT^j$.

a) Montrer que l'on a $\|TS\|_L \leqslant \|\ T\|_L\|S\|_L$.

b) Pour tout entier $K \geqslant 0$, on pose

$$S_K(T) = \sum_{j=0}^{j=K} \frac{1}{j!} T^j$$

Montrer que la suite $(S_K(T))_{K\geqslant 0}$ converge dans l'espace $L(l^2(\mathbf{Z}))$.

c) On pose

$$\lim_{K\to\infty} S_K(T) = \mathrm{Exp}(T).$$

Montrer que si A et B sont deux éléments de $L(l^2(\mathbf{Z}))$ tels que $AB = BA$, alors

$$\mathrm{Exp}(A+B) = \mathrm{Exp}(A)\mathrm{Exp}(B)$$

(on pourra établir tout d'abord l'inégalité suivante :

$$\left\|\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}(A+B)^k - (\sum_{j=0}^{j=n} \frac{1}{j!}A^j)(\sum_{l=0}^{l=n} \frac{1}{l!}B^l)\right\|_L \leqslant \left(\sum_{j=0}^{j=n} \frac{1}{j!}\|A\|_L^j\right)\left(\sum_{l=0}^{l=n} \frac{1}{l!}\|B\|_L^l\right) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}\left(\|A\|_L + \|B\|_L\right)^k).$$

III. **Cônes fermés et sous-algèbres**

On appellera *sous-algèbre* de $L(l^2(\mathbf{Z}))$ un sous-espace vectoriel $\mathbf{A}$ de $L(l^2(\mathbf{Z}))$ tel que pour tout couple (S,T) d'éléments de $\mathbf{A}$, on a $ST \in \mathbf{A}$.

1. Soit $\mathbf{D}$ l'ensemble constitué des applications linéaires T telles qu'il existe une suite bornée $(t_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de nombres réels telle que, pour tout $v = (v_k) \in l^2(\mathbf{Z})$, on a

$$T(v)_k = t_k v_k$$

pour tout $k \in \mathbf{Z}$. Montrer que $\mathbf{D}$ est une sous-algèbre de $L(l^2(\mathbf{Z}))$.

2. On note P le sous-ensemble de $l^2(\mathbf{Z})$ défini par

$$P = \{v = (v_k) \in l^2(\mathbf{Z});\ v_k \in \mathbf{R}^+ \text{ pour tout } k \in \mathbf{Z}\}.$$

Soit $T \in L(l^2(\mathbf{Z}))$. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) $T \in \mathbf{D}$.

(ii) Il existe $\lambda \in \mathbf{R}^+$ tel que pour tout $x \in P$, on ait $\lambda x - T(x) \in P$ et $\lambda x + T(x) \in P$.

3. Plus généralement, on appelle *cône fermé* un sous-ensemble convexe fermé Q de $l^2(\mathbf{Z})$ tel que pour tout $x \in Q$ et tout $t \in \mathbf{R}^+$, on a $(tx) \in Q$. On note

$$\mathbf{A}_Q = \{T \in L(l^2(\mathbf{Z}))\ ;\ \text{il existe } \lambda \in \mathbf{R}^+ \text{ tel que } \lambda x - T(x) \in Q \text{ et } \lambda x + T(x) \in Q \text{ pour tout } x \in Q\}.$$

Montrer que $\mathbf{A}_Q$ est une sous-algèbre de $L(l^2(\mathbf{Z}))$.

4. Soit Q un cône fermé.

a) Montrer que si $S \in L(l^2(\mathbf{Z}))$ satisfait $S(Q) \subset Q$, alors $\mathrm{Exp}(S)(Q) \subset Q$.

b) En déduire que si $T \in \mathbf{A}_Q$, alors $\mathrm{Exp}(T)(Q) \subset Q$.

IV. **Construction de sous-espaces invariants**

Soit $\mathbf{A}$ une sous-algèbre de $L(l^2(\mathbf{Z}))$. On fait l'hypothèse suivante, notée (H) :

Il existe un convexe fermé C_0 de $l^2(\mathbf{Z})$, différent de l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ tout entier et du singleton $\{0\}$, tel que pour tout $T \in \mathbf{A}$, on a $\mathrm{Exp}(T)(C_0) \subset C_0$.

1. Montrer que si Q est un cône fermé différent de l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ tout entier et du singleton $\{0\}$, l'algèbre $\mathbf{A}_Q$ satisfait l'hypothèse (H).

2. a) Montrer qu'il existe $p \in C_0\backslash\{0\}$ et $w \in l^2(\mathbf{Z})\backslash\{0\}$ tels que $< w, x - p > \leqslant 0$ pour tout $x \in C_0$ (on utilisera la question I.4.d).

Pour tout $T \in \mathbf{A}$, on définit une fonction ϕ_T de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par

$$\phi_T(s) = < w, \mathrm{Exp}(sT)(p) > .$$

b) Montrer que ϕ_T est une fonction développable en série entière.

c) Montrer que $\phi_T(s) \leqslant \phi_T(0)$ pour tout $s \in \mathbf{R}$.

d) En déduire que $< w, T(p) > = 0$ pour tout $T \in \mathbf{A}$.

On continue à désigner par p le vecteur obtenu dans cette question, jusqu'à la fin de la partie IV.

3. Montrer que s'il existe $T \in \mathbf{A}$ tel que $T(p) \neq 0$, alors l'adhérence M de l'espace $M_0 = \{T(p);\ T \in \mathbf{A}\}$ est un sous-espace vectoriel fermé, distinct de l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ tout entier et du singleton $\{0\}$, tel que $T(M) \subset M$ pour tout $T \in \mathbf{A}$.

4. Montrer que si $T(p) = 0$ pour tout $T \in \mathbf{A}$, la droite vectorielle D engendrée par $\{p\}$ vérifie que $T(D) \subset D$ pour tout $T \in \mathbf{A}$.

5. En déduire que si $\mathbf{A}$ est une sous-algèbre qui satisfait (H), alors il existe un sous-espace vectoriel fermé V, distinct de l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ tout entier et du singleton $\{0\}$, tel que $T(V) \subset V$ pour tout $T \in \mathbf{A}$.

V. **Sous-espaces bi-invariants de shifts à poids**

On note $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$ l'espace vectoriel complexe des suites $x = (x_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de nombres complexes indexées par $\mathbf{Z}$ telles que
$$\|x\| = \left[\sum_{k\in\mathbf{Z}} |x_k|^2\right]^{1/2} < \infty.$$
On rappelle que la fonctionnelle définie ci-dessus est une norme sur l'espace $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$. Pour $x \in l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$ et $y \in l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$, on pose
$$< x, y >= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \overline{x}_k y_k.$$
On admettra sans justification que l'on définit ainsi un produit scalaire hermitien sur $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$.

Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ une suite de nombres réels vérifiant la propriété suivante, notée (B) :
$$0 < \inf\{\lambda_k;\ k \in \mathbf{Z}\} \leqslant \sup\{\lambda_k;\ k \in \mathbf{Z}\} < \infty. \tag{B}$$

1. Pour $x = (x_k) \in l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$, on définit une suite $S(x)$ de nombres complexes indexée par $\mathbf{Z}$ en posant pour tout $k \in \mathbf{Z}$,
$$S(x)_k = \lambda_{k-1} x_{k-1}.$$
Dans le cas particulier où $\lambda_k = 1$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on définit S_1 par
$$S_1(x)_k = x_{k-1}.$$
Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ une suite de nombres réels satisfaisant (B), et soit S l'opérateur correspondant. Montrer que S définit une application linéaire continue inversible de $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$ sur $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$, dont l'inverse S^{-1} est également continu.

2. On définit une suite $(w_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de la façon suivante :

(i) $w_0 = 1$;

(ii) Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $\dfrac{w_{k+1}}{w_k} = \lambda_k$.

Soit F l'espace vectoriel des suites $y = (y_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de nombres complexes indexées par $\mathbf{Z}$ telles que $\{k;\ y_k \neq 0\}$ soit fini. On considère l'application linéaire $W : F \to F$ définie par

$$W(y)_k = w_k y_k$$

pour tout $k \in \mathbf{Z}$. Montrer que

$$SW(y) = WS_1(y)$$

pour tout $y \in F$.

3. On suppose, dans cette question et jusqu'à la fin de la partie V, que pour tout $k \geqslant 0$, on a

$$\lambda_{-k-1} = (\lambda_k)^{-1}.$$

a. Montrer que $w_k = w_{-k}$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

b. Soit $E = \{x \in l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})\ ;\ x_{-k} = \overline{x}_k \text{ pour tout } k \in \mathbf{Z}\}$. Montrer que la famille $(\varepsilon(j))_{j\in\mathbf{Z}}$ de vecteurs de E définie par :

(i) $\varepsilon(0)_0 = 1$, $\varepsilon(0)_k = 0$ sinon,

(ii) si $j \geqslant 1$, $\varepsilon(j)_k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ si $k = \pm j$, $\varepsilon(j)_k = 0$ sinon,

(iii) si $j \leqslant -1$, $\varepsilon(j)_k = \dfrac{i}{\sqrt{2}}$ si $k = j$, $\varepsilon(j)_k = \dfrac{-i}{\sqrt{2}}$ si $k = -j$, $\varepsilon(j)_k = 0$ sinon,

est orthonormée. En déduire que E est un espace vectoriel réel isométrique à l'espace $l^2(\mathbf{Z})$.

4. Pour tout $y = (y_k)_{k\in\mathbf{Z}} \in F$, on note $\widehat{y}$ le polynôme trigonométrique défini par

$$\widehat{y}(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} y_k e^{ikt}.$$

Montrer qu'alors $y \in E$ si et seulement si $\widehat{y}(t) \in \mathbf{R}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

5. On définit les applications linéaires

$$C = \frac{1}{2}[S + S^{-1}]$$

et

$$D = \frac{1}{2i}[S - S^{-1}]$$

a. Montrer que $C(E) \subset E$ et que $D(E) \subset E$.

b. On pose
$$P = \{W(y);\ y \in F \text{ et } \ \forall t \in \mathbf{R},\ \ \widehat{y}(t) \in \mathbf{R}^+\}.$$

Montrer que $P \subset E$ et que, pour tout $z = (z_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de P, on a $z_0 \geqslant 0$.

Établir que $(I - C)(P) \subset P$, que $(I + C)(P) \subset P$, que $(I - D)(P) \subset P$ et que $(I + D)(P) \subset P$.

c. En déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé M de E, distinct de $\{0\}$ et de l'espace E, tel que $C(M) \subset M$ et $D(M) \subset M$ (on utilisera en particulier les questions III.4 et IV.5).

6. a. Montrer que si $(u, v) \in E^2$, on a $\|u + iv\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

b. On pose $J = \{u + iv;\ (u, v) \in M^2\}$. Montrer que J est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace vectoriel complexe $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$, distinct de $\{0\}$ et de $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$, tel que $S(J) \subset J$ et $S^{-1}(J) \subset J$.

VI. **Sous-espaces bi-invariants fonctionnels.**

On garde les notations et les hypothèses de la partie V, questions 1 et 2. On suppose à présent que
$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} w_k^{-2} < \infty.$$

1. Montrer que pour tout $x \in l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$, on a
$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |w_k^{-1} x_k| < \infty.$$

2. Pour tout $x \in l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on pose
$$\Omega(x)(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} {w_k}^{-1} x_k e^{ikt}$$

et pour tout $t_0 \in \mathbf{R}$, on définit
$$M_{t_0} = \{x \in l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})\ ;\ \Omega(x)(t_0) = 0\}$$

Montrer que M_{t_0} est un sous-espace fermé de $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$, distinct de $\{0\}$ et de l'espace $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$ tout entier.

3. Montrer que $S(M_{t_0}) \subset M_{t_0}$ et que $S^{-1}(M_{t_0}) \subset M_{t_0}$.

4. Montrer qu'il n'existe pas de sous-espace de dimension finie X de $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$ distinct de $\{0\}$ tel que $S(X) \subset X$.

5.2 Corrigé de la deuxième épreuve écrite

PARTIE I.

1. C'est l'identité du parallélogramme, obtenue par bilinéarité du produit scalaire.

2.a) Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on a
$$|v(n)_k - v(l)_k| \leqslant \|v(n) - v(l)\|$$
d'où le résultat si $n, l \geqslant N(\epsilon)$.

2.b) La suite $(v(n)_k)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans $\mathbf{R}$ qui est complet, et donc elle converge.

2.c) C'est une conséquence immédiate du fait que $v(N(\epsilon)) \in l^2(\mathbf{Z})$.

2.d) Pour tout $n \geqslant N(\epsilon)$ et tout $L \geqslant K$, on a d'après l'inégalité de Minkowski
$$[\sum_{L\geqslant|k|\geqslant K} v(n)_k^2]^{1/2} \leqslant [\sum_{L\geqslant|k|\geqslant K} (v(n)_k - v(N(\epsilon))_k)^2]^{1/2} + [\sum_{L\geqslant|k|\geqslant K} v(N(\epsilon))_k^2]^{1/2}$$
et donc
$$[\sum_{L\geqslant|k|\geqslant K} v(n)_k^2]^{1/2} \leqslant \|v(n) - v(N(\epsilon)\| + \epsilon \leqslant 2\epsilon.$$
En passant à la limite en n, on en déduit
$$[\sum_{L\geqslant|k|\geqslant K} v_k^2]^{1/2} \leqslant 2\epsilon.$$

2.e) D'après d), la série
$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} v_k^2$$
est convergente, donc $v = (v_k) \in l^2(\mathbf{Z})$. Si $K \geqslant 0$ et $n, l \geqslant N(\epsilon)$, on a
$$[\sum_{|k|\leqslant K} (v(n)_k - v(l)_k)^2]^{1/2} \leqslant \epsilon$$
donc en passant à la limite en n, on a
$$[\sum_{|k|\leqslant K} (v_k - v(l)_k)^2]^{1/2} \leqslant \epsilon$$
puis en passant à la limite en K,
$$\|v - v(l)\| \leqslant \epsilon$$
pour tout $l \geqslant N(\epsilon)$, ce qui montre que la suite $v(n)$ converge vers v dans $l^2(\mathbf{Z})$ et donc que cet espace est complet.

3.a) Notons d'abors que l'existence de la suite $v(n)$ s'ensuit de la définition de d comme borne inférieure. D'après le 1), on a pour tous u, v dans $l^2(\mathbf{Z})$ que
$$\|\frac{u+v}{2}\|^2 + \|\frac{u-v}{2}\|^2 = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$
Si $(u, v) \in C^2$, on a $\frac{u+v}{2} \in C$ puisque cet ensemble est convexe, d'où $\|\frac{u+v}{2}\| \geqslant d$, et le résultat s'ensuit.

3.b) Il s'ensuit du a) que la suite $v(n)$ est de Cauchy, donc converge dans $l^2(\mathbf{Z})$ puisque cet espace est complet. Sa limite v appartient à C puisque cet ensemble est fermé, et la continuité de l'application norme montre que $\|v\| = d$. Si v et w sont deux points de C, on a comme au a) que

$$\|\frac{v-w}{2}\|^2 \leqslant \frac{1}{2}(\|v\|^2 + \|w\|^2) - d^2$$

et donc si $\|v\| = \|w\| = d$, on a $v = w$.

4.a) Soit $x \in C\backslash\{0\}$. La droite vectorielle D engendrée par x est d'intérieur vide dans $l^2(\mathbf{Z})$, donc elle ne contient pas l'ouvert non vide $l^2(\mathbf{Z})\backslash C$. Soit donc $y \in l^2(\mathbf{Z})\backslash(C \cup D)$. Le segment $[x, y]$ rencontre C en $z \neq 0$ puisque $y \notin D$. (Remarque : dans cette question comme dans les suivantes, une figure précise peut constituer un argument acceptable).

4.b) Soit $z \in C\backslash\{0\}$. Puisque $\|z\|/3 > 0$ et que $z \in C$, il existe $v \notin C$ tel que $\|v - z\| < \|z\|/3$, et donc

$$\|v\| \geqslant \frac{2}{3}\|z\| > \|v - z\| \geqslant inf\{\|v - x\|;\ x \in C\} > 0.$$

4.c) En appliquant la question 3.b) au convexe $(C - v)$, on trouve $p \in C$ tel que

$$\|v - p\| = inf\{\|v - x\|;\ x \in C\}.$$

L'égalité ci-dessus montre que $[v, p] \cap C = \{p\}$ et donc $p \in C$. Enfin, $p \neq 0$ puisque $\|v\| > inf\{\|v - x\|;\ x \in C\}$.

4.d) On a

$$< v - p, q - p >= \|v - p\|^2 - < v - p, v - q >$$

et d'autre part la forme polaire du produit scalaire montre que

$$4 < v - p, v - q >= \|2v - p - q\|^2 + \|q - p\|^2$$

donc

$$4 < v - p, v - q > \geqslant 4\|v - \frac{p+q}{2}\|^2$$

et puisque $\frac{p+q}{2} \in C$, on a

$$< v - p, v - q > \geqslant \|v - p\|^2$$

et par conséquent $< v - p, q - p > \leqslant 0$. (Remarque : on peut aussi utiliser le fait que la fonction $F(t) = \|v - p + t(p - q)\|^2$ atteint son minimum sur $[0, 1]$ en $t = 0$, donc que sa dérivée en $t = 0$ est positive, et cette dérivée vaut $< v - p, p - q >$).

PARTIE II.

1. Il est évident que (i) implique (ii). D'après (ii), il existe $a > 0$ tel que $\|T(x)\| \leqslant 1$ dès que $\|x\| \leqslant a$, donc par homogénéité on a $\|T(x)\| \leqslant 1/a$ dès que $\|x\| \leqslant 1$, d'où (iii). Enfin, si

$$\|T(x)\| \leqslant M$$

dès que $\|x\| \leqslant 1$, l'application T est M-Lipschitzienne par linéarité, donc en particulier continue en tout point et on a (i).

2.a) Une combinaison linéaire d'applications linéaires (continues) est linéaire (continue), donc $L(l^2(\mathbf{Z}))$ est un espace vectoriel. L'homogénéité de la fonctionnelle $\| \ . \ \|_L$ est claire, et l'inégalité triangulaire se vérifie directement par passage au sup. Si $\|T\|_L = 0$, on a $\|T(x)\| = 0$ si $\|x\| \leqslant 1$, donc pour tout x par homogénéité.

2.b) Pour tout $T \in L(l^2(\mathbf{Z}))$ et tout $x \in l^2(\mathbf{Z})$, on a

$$\|T(x)\| \leqslant \|T\|_L \|x\|$$

donc en particulier

$$\|T_p(x) - T_q(x)\| \leqslant \|T_p - T_q\|_L \|x\|$$

d'où il s'ensuit que la suite $(T_n(x))$ est de Cauchy.

2.c) On définit $T(x) = lim\ T_n(x)$, qui existe bien puisque $l^2(\mathbf{Z})$ est complet. L'application T ainsi définie est linéaire puisque la linéarité est conservée par limite ponctuelle. Si $\epsilon > 0$ et $\|T_p - T_q\|_L \leqslant \epsilon$ si $p, q \geqslant N$, on a $\|T(x) - T_q(x)\| \leqslant \epsilon \|x\|$ pour tout x et tout $q \geqslant N$, d'où il s'ensuit que $T \in L(l^2(\mathbf{Z}))$ (plus précisément, $\|T\|_L \leqslant \|T_N\|_L + \epsilon$) et que $\|T - T_q\|_L \leqslant \epsilon$ pour tout $q \geqslant N$, ce qui montre le résultat.

3.a) Pour tout x, on a

$$\|TS(x)\| \leqslant \|T\|_L \|S(x)\| \leqslant \|T\|_L \|S\|_L \|x\|.$$

3.b) Pour tous $p < q$, on a

$$\|\sum_{j=p}^{j=q} \frac{1}{j!} T^j\|_L \leqslant \sum_{j=p}^{j=q} \frac{1}{j!} \|T^j\|_L \leqslant \sum_{j=p}^{j=q} \frac{1}{j!} \|T\|_L^j$$

et par conséquent la suite $S_K(T)$ est de Cauchy dans $L(l^2(\mathbf{Z}))$ puisque la série de réels positifs qui définit $e^{\|T\|_L}$ est convergente, et donc elle converge dans cet espace par complétude.

3.c) Puisque A et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme. Nous avons donc

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}(A+B)^k = \sum_{0 \leqslant j+l \leqslant n} \frac{1}{j!l!} A^j B^l$$

et par conséquent nous avons donc

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}(A+B)^k - (\sum_{j=0}^{j=n} \frac{1}{j!} A^j)(\sum_{l=0}^{l=n} \frac{1}{l!} B^l) = - \sum_{n < j+l \leqslant 2n} \frac{1}{j!l!} A^j B^l. \qquad (*)$$

Notons que le calcul qui établit l'équation $(*)$ peut être effectué dans $\mathbf{R}$ où il établit donc une équation identique. D'aprés $(*)$, le a) et l'inégalité triangulaire, on a

$$\|\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}(A+B)^k - (\sum_{j=0}^{j=n} \frac{1}{j!} A^j)(\sum_{l=0}^{l=n} \frac{1}{l!} B^l)\|_L \leqslant \sum_{n < j+l \leqslant 2n} \frac{1}{j!l!} \|A\|_L^j \|B\|_L^l$$

et l'inégalité $(*)$ dans $\mathbf{R}$ montre que le membre de droite de l'inégalité ci-dessus est identique au membre de droite de l'inégalité à établir, qui est ainsi montrée.

La formule $e^{\|A\|_L} e^{\|B\|_L} = e^{\|A\|_L + \|B\|_L}$ et un passage à la limite dans l'inégalité montrent alors le résultat, puisque l'opération de produit est continue dans $L(l^2(\mathbf{Z}))$, d'aprés l'inégalité

$$\|UV - TS\|_L \leqslant \|U - T\|_L \|S\|_L + \|U\|_L \|V - S\|_L.$$

PARTIE III.

1. Si $T(v)_k = t_k v_k$ et $S(v)_k = s_k v_k$, on a clairement $(T+S)(v)_k = (t_k+s_k)v_k$ et $(TS)(v)_k = (t_k s_k)v_k$. La formule de multiplication par un scalaire est également claire.

2. Si $T(v)_k = t_k v_k$, soit $M = sup\{|t_k|;\ k \in \mathbf{Z}\}$. En prenant $\lambda = M$, on voit que (i) implique (ii). Notons $\delta_n(k) = 1$ si $n = k$ et 0 sinon. Il est clair que $\delta_n \in P$. En appliquant (ii) à δ_n, on voit que si $k \neq n$, on a $-T(\delta_n)_k \geqslant 0$ et $T(\delta_n)_k \geqslant 0$, et donc il existe $t_n \in \mathbf{R}$ tel que $T(\delta_n) = t_n \delta_n$. En appliquant (ii) à δ_n en $k = n$, on voit que $|t_n| \leqslant \lambda$ pour tout n et (i) s'ensuit.

3. Soient $T \in \mathbf{A}_Q$ et $S \in \mathbf{A}_Q$, et soient λ et μ tels que $T \pm \lambda I(Q) \subset Q$ et $S \pm \mu I(Q) \subset Q$. On calcule :

$$(S + \mu I)(T + \lambda I) = ST + \mu T + \lambda S + \mu\lambda I$$

$$(S - \mu I)(T - \lambda I) = ST - \mu T - \lambda S + \mu\lambda I$$

Les operateurs considérés dans les deux lignes ci-dessus envoient Q dans lui-même, ainsi que leur demi-somme puisque Q est convexe. Or cette demi-somme vaut $ST + \lambda\mu I$. De même, on calcule

$$(S + \mu I)(T - \lambda I) = ST + \mu T - \lambda S - \lambda\mu I$$

$$(S - \mu I)(T + \lambda I) = ST - \mu T + \lambda S - \lambda\mu I$$

et la demi-somme de ces opérateurs vaut $ST - \lambda\mu I$. On voit ainsi que $ST \in \mathbf{A}_Q$, la constante correspondante étant $\lambda\mu$. Il est plus simple de vérifier que $\mathbf{A}_Q$ est un espace vectoriel, en utilisant l'obsevation que si x et y sont dans Q alors leur somme $(x + y)$ est également dans Q.

4. a) Le cône Q est stable par somme et par multiplication par un réel positif. Avec les notations de la question II. 3, il s'ensuit que si $S(Q) \subset Q$, alors $S_K(S)(Q) \subset Q$. Mais comme Q est fermé, on trouve en passant à la limite que $Exp(S)(Q) \subset Q$.

4. b) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $(T + \lambda I)(Q) \subset Q$. D'après la question II.3, on a $Exp(T + \lambda I) = e^{\lambda} Exp(T)$. D'après le a), on a $Exp(T + \lambda I)(Q) \subset Q$. Mais $e^{-\lambda} Q = Q$, et donc $Exp(T)(Q) \subset Q$.

PARTIE IV.

1. Cela a en fait été montré à la question III.4.

2. a) Il suffit d'utiliser la question I.4. d), en remarquant que puisque $v \notin C_0$, on a $w = v - p \neq 0$.

2. b) D'après la continuité du produit scalaire, en peut écrire pour tout $s \in \mathbf{R}$ que

$$\phi_T(s) =< w, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} T^n(p) >= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} < w, T^n(p) > .$$

2. c) On a $< w, p > \geqslant < w, x >$ pour tout $x \in C_0$, d'où la conclusion puisque $\phi_T(0) =< w, p >$ et $Exp(sT)(p) = x \in C_0$ pour tout $s \in \mathbf{R}$.

2. d) D'après le c), on a $\phi_T'(0) = 0$ et le développement en série établi en b) montre que $\phi_T'(0) =< w, T(p) >$.

3. L'application $T \to T(p)$ est linéaire et donc l'image de l'espace vectoriel $\mathbf{A}$ est un espace vectoriel. Il s'ensuit que M_0 est un espace vectoriel fermé, puisque par continuité des combinaisons linéaires

l'adhérence d'un espace vectoriel est un espace vectoriel. On a aisément $S(M_0) \subset M_0$ pour tout $S \in \mathbf{A}$ puisque $\mathbf{A}$ est une sous-algèbre. Enfin, M_0 n'est pas réduit à $\{0\}$ pusque $T(p) \neq 0$, et est différent de l'espace entier puisque d'après la question 2. d) il est contenu dans l'hyperplan orthogonal à w.

4. On a évidemment $T(D) = \{0\} \subset D$ pour tout $T \in \mathbf{A}$.

5. Il suffit de récapituler les conclusions obtenues aux questions 3) et 4).

PARTIE V.

1. La condition de bornitude (B) implique facilement que S envoie l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ dans lui-même, et définit une application linéaire continue, dont la norme est $sup\{\lambda_n;\ n \in \mathbf{Z}\}$. Son inverse S^{-1} est donné par

$$(S^{-1}(x))_k = \frac{1}{\lambda_k} x_{k+1}$$

et les mêmes considérations s'appliquent à S^{-1} (remarque : l'inverse d'un opérateur linéaire continu inversible sur un espace de Banach est automatiquement continu par le théorème du graphe fermé, mais la vérification directe est ici très facile).

2. On note toujours $\delta_n(k) = 1$ si $n = k$ et 0 sinon. Dans cette notation, on a $S_1(\delta_k) = \delta_{k+1}$ et $WS_1(\delta_k) = w_{k+1}\delta_{k+1}$, cependant que $W(\delta_k) = w_k\delta_k$ et $SW(\delta_k) = \lambda_k w_k \delta_{k+1}$. Comme $w_{k+1} = \lambda_k w_k$, le résultat s'ensuit.

3. a) C'est une vérification directe par récurrence.

3. b) Le caractère orthonormé de la suite $(\epsilon(j))_{j\in\mathbf{Z}}$ se vérifie par un calcul simple et direct. Pour tous les réels a et b et tout $k \in \mathbf{Z}$, on a d'autre part

$$(a+ib)\delta_k + (a-ib)\delta_{-k} = a(\delta_k + \delta_{-k}) + b(i\delta_k - i\delta_{-k})$$

d'où

$$(a+ib)\delta_k + (a-ib)\delta_{-k} = \sqrt{2}.a\epsilon(k) + \sqrt{2}.b\epsilon(-k)$$

On vérifie immédiatement que E est un espace vectoriel réel. Si $x = (x_k) \in E$, on a

$$\|x\|^2 = |x_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = |x_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\sqrt{2}Re(x_k)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\sqrt{2}Im(x_k)|^2.$$

Cette formule et l'équation précedente montrent clairement que E est isométrique à $l^2(\mathbf{Z})$. Notons que cela s'ensuit également du résultat classique qui assure que tous les espaces euclidiens séparables complets de dimension infinie sont isométriques.

4. Si $\widehat{y}(t) \in \mathbf{R}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\sum y_k e^{ikt} = \sum \overline{y_k} e^{-ikt} = \sum y_{-k} e^{-ikt}$$

où les sommes ci-dessus sont finies, et on déduit de l'unicité des coefficients d'un polynôme trigonométrique (montrée par exemple en remarquant que ce sont les coefficients de Fourier) que $\overline{y_k} = y_{-k}$ pour tout k. Inversement, si cette condition est vérifiée, on a pour tout k et $t \in \mathbf{R}$

$$y_k e^{ikt} + y_{-k} e^{-ikt} = 2Re(y_k e^{ikt}).$$

5. a) Un calcul direct montre que si $x = (x_k) \in E$, on a

$$C(x)_0 = \frac{1}{2}[\lambda_{-1}x_{-1} + \frac{x_1}{\lambda_0}] = \frac{\lambda_{-1}}{2}(x_{-1} + x_1) \in \mathbf{R}$$

et si $k > 0$, on a

$$C(x)_k = \frac{1}{2}[\lambda_{k-1}x_{k-1} + \frac{x_{k+1}}{\lambda_k}]$$

et

$$C(x)_{-k} = \frac{1}{2}[\lambda_{-k-1}x_{-k-1} + \frac{x_{-k+1}}{\lambda_{-k}}] = \frac{1}{2}[\lambda_{k-1}\overline{x_{k-1}} + \frac{\overline{x_{k+1}}}{\lambda_k}]$$

et donc $C(x) \in E$. Un calcul analogue montre que $D(E) \subset E$.

Indiquons une autre approche plus synthétique : si on pose

$$C_1 = \frac{1}{2}[S_1 + S_1^{-1}]$$

on a dans les notations ci-dessus

$$\widehat{S_1(y)}(t) = cos(t)\widehat{y}(t)$$

et d'après la question 4 on a $C_1(E \cap F) \subset E \cap F$. Pour passer au cas général, on remarque que $W(E \cap F) = E \cap F$ et que $CW = WC_1$ par la question 2. Il s'ensuit que $C(E \cap F) \subset E \cap F$, d'où par densité la même inclusion pour E. Le cas de D est analogue, avec cette fois la fonction sin.

5. b) D'après la question 4, on a $y_{-k} = \overline{y_k}$ pour tout k, d'où $w_{-k}y_{-k} = \overline{w_k y_k}$ et donc $P \subset E$. De plus

$$z_0 = w_0 y_0 = y_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{y}(t)dt \geqslant 0.$$

On a de plus

$$(I - C)W(y) = W(I - C_1)(y)$$

et si $\widehat{y}(t) \geqslant 0$, on a

$$(I - \widehat{C_1)}(y)(t) = (1 - cos(t))\widehat{y}(t) \geqslant 0$$

et donc

$$(I - C)W(y) = W(z)$$

où $\widehat{z}(t) \geqslant 0$ pour tout t, et donc $(I - C)(P) \subset P$. Les autres inclusions sont analogues.

5. c) Soit $Q = \overline{P}$. Comme $z_0 \geqslant 0$ pour tout $z \in P$, Q est distinct de E, et comme Q contient δ_0, il n'est pas réduit à $\{0\}$. Il est clair que Q est un cône convexe fermé. D'après le b), on a $C \in \mathbf{A_Q}$ et $D \in \mathbf{A_Q}$. Comme l'algèbre $\mathbf{A_Q}$ satsifait la condition (H) de la partie IV, il existe d'après la question IV.5 un sous-espace fermé M de E, distinct de E et de $\{0\}$, tel que $T(M) \subset M$ pour tout $T \in \mathbf{A_Q}$, donc en particulier pour C et D.

6. a) On a par bilinéarité

$$< u + iv, u + iv >= \|u\|^2 + 2Re < u, iv > +\|v\|^2$$

et il est facile de vérifier que si u et v appartiennent à E, alors $< u, v >\in \mathbf{R}$. Le résultat s'ensuit.

Remarque : nous sommes ici dans le cas où l'identité de Pythagore est satisfaite bien que u et iv ne soient pas orthogonaux. Mais bien sûr la réciproque du théorème de Pythagore n'est pas vraie dans le cas complexe.

6. b) Il est clair que J est un espace vectoriel complexe. D'après le a), si $x_n = u_n + iv_n$ est une suite convergente d'éléments de J, alors les suites u_n et v_n sont également convergentes, leur limite est dans M puisque M est fermé et il s'ensuit que J est fermé.

Il est clair que $M \subset J \cap E$. D'autre part, si $u + iv = u' \in J \cap E$, on a $(u - u') \in E \cap iE$. Mais si $x = iy \in E \cap iE$, on a d'après le a) que

$$0 = \|x - iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

d'où $x = y = 0$. On a donc $u = u'$ et $v = 0$, et par conséquent $J \cap E \subset M$. On a montré que $J \cap E = M$, donc en particulier que J est distinct de $\{0\}$ et de $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$.

Enfin, $C(M) \subset M$ donc $C(iM) \subset iM$ et $C(J) \subset J$; de même pour D. Comme $S = C + iD$ et $S^{-1} = C - iD$, on a finalement que $S(J) \subset J$ et $S^{-1}(J) \subset J$, et J est un sous-espace bi-invariant non trivial du shift à poids S.

PARTIE VI.

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$[\sum |w_k^{-1} x_k|]^2 \leqslant (\sum w_k^{-2})(\sum x_k^2)$$

d'où le résultat.

2. Il est clair que M_{t_0} est l'hyperplan orthogonal au vecteur non nul $(\overline{w_k^{-1} e^{-ikt_0}})_k$ dans l'espace $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$.

3. Sachant que $w_{k-1}^{-1} = w_k^{-1}\lambda_{k-1}$, on voit par un glissement d'indices que

$$\Omega[S(x)](t) = e^{it}\Omega(x)(t)$$

et

$$\Omega[S^{-1}(x)](t) = e^{-it}\Omega(x)(t).$$

La conclusion est alors immédiate.

4. Le calcul effectué en 3) montre que pour tout polynôme P, on a

$$\Omega[P(S)(x)](t) = P(e^{it})\Omega(x)(t).$$

Si X est un sous-espace de dimension finie tel que $S(X) \subset X$, il existe un polynôme non nul P tel que $P(S)(x) = 0$ pour tout $x \in X$: on peut par exemple prendre pour P le polynôme caractéristique de la restriction de S à X, d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Mais alors on a

$$P(e^{it})\Omega(x)(t) = 0$$

pour tout $x \in X$ et tout $t \in \mathbf{R}$. Il s'ensuit que $\Omega(x)(t) = 0$ pour tout t, et donc $x = 0$, et on a montré que $X = \{0\}$.

5.3 Commentaires sur la deuxième épreuve écrite

COMMENTAIRES SUR LA DEUXIÈME ÉPREUVE

Ce problème se propose d'établir l'existence de sous-espaces fermés invariants non triviaux pour certains opérateurs linéaires continus sur l'espace de Hilbert. On ne sait toujours pas si toutes les applications linéaires continues sur un espace de Hilbert séparable (ou même plus généralement sur un espace de Banach séparable réflexif de dimension infinie) admettent un sous-espace invariant fermé différent de $\{0\}$ et de l'espace tout entier. Ce problème ouvert bien connu fait l'objet de recherches intenses, qui s'adressent en particulier à la classe des opérateurs de décalage pondéré (ou "shift à poids"). Même dans cette sous-classe, la question n'est pas résolue. Le présent problème concerne une classe de shift à poids qui a été étudiée récement, et pour laquelle une condition de symétrie permet de conclure à l'existence de sous-espaces invariants.

Le problème ne nécessitait pas la mise en place de calculs longs ou difficiles, mais faisait appel aux capacités innovatrices des candidats, sur un sujet assez neuf. Il faut observer, cependant, qu'une partie très significative du problème (en particulier, les deux premières sections, à l'exception de la question I.4) était constituée de questions de cours. En effet, dans tout bon livre d'analyse fonctionnelle, le caractère complet de $l^2(\mathbf{Z})$, la projection métrique sur les convexes fermés de l'espace de Hilbert, les propriétés de la norme des endomorphismes continus, l'exponentielle d'un endomorphisme continu, sont traités comme du cours. C'est dire l'intérêt de lire et de travailler les notions fondamentales d'analyse des programmes de Licence et de Maîtrise à travers les ouvrages. De bonnes références sont données par la liste des livres de la bibliothèque de l'Agrégation.

De nombreuses questions d'analyse invitent à dépasser le stade du calcul pour cerner avec précision ce qu'il faut en effet démontrer, que peut cacher la formulation concise de la question. Par exemple, dans la question II.2.c), il faut montrer que $T(x) = lim\ T_n(x)$ existe pour tout $x \in l^2(\mathbf{Z})$, que l'on définit ainsi un endomorphisme de $l^2(\mathbf{Z})$, que celui-ci est continu et que la suite (T_n) converge bien vers T pour la norme $\| \ . \ \|_L$. Mieux vaut dans une telle question faire l'inventaire de ce qu'il y a à prouver, quitte à reconnaitre si nécessaire que la démonstration de certains points n'est pas établie. Parfois, le recours aux figures peut être bien utile, comme par exemple dans la question I.4. Bien sûr, une figure n'est pas une démonstration et elle peut même s'avérer trompeuse. Cependant, l'analyse hilbertienne est de nature profondément géométrique, et un dessin peut d'une part convaincre le lecteur qu'on a compris de quoi il retourne, et d'autre part mettre sur la voie d'une démonstration formelle. Enfin, on ne recommandera jamais assez aux candidats de revenir aux notions de base. Il est bien clair qu'un problème d'analyse a toutes les chances de faire appel à quelques manipulations de quantificateurs, à la définition de la continuité, à la notion de limite. Les hésitations et les erreurs sur ces concepts fondamentaux sont regrettables quand elles émanent d'enseignants qui, sans doute, ne vont pas entrainer leurs classes dans ces dédales, mais qui devront être guidés par des idées très claires lorsqu'ils aideront leurs élèves à se construire une intuition convenable de ces notions.

Avant de passer à un examen question par question du problème, décrivons-le brièvement. La partie I établit la complétude de l'espace $l^2(\mathbf{Z})$, le théorème de projection sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert, puis pour un convexe non trivial de l'espace de Hilbert l'existence d'un point frontière non nul et d'un vecteur normal en ce point. La partie II met en place l'exponentielle d'un opérateur linéaire continu, et établit que l'exponentielle de la somme de deux opérateurs qui commutent est le produit des exponentielles. La partie III étudie l'algèbre des multiplicateurs associés à un cône convexe fermé, d'abord sur un exemple simple puis en général, et établit que l'exponentielle de tout opérateur dans cette algèbre est un endomorphisme positif relativement à ce cône. La partie IV utilise une dérivation pour passer de l'existence d'un convexe fermé invariant à celle d'un sous-espace fermé invariant. Avec la partie III, elle montre donc que l'algèbre des multiplicateurs d'un cône convexe fermé non trivial n'est pas transitive. La partie V illustre ce résulat par un exemple. Au moyen d'une transformation de Fourier qui permet de se ramener à la technique de positivité des parties III et IV, on y montre en effet que l'algèbre engendrée par certains décalages pondérés n'est pas transitive et donc que ces décalages admettent des sous-espaces bi-invariants. Ce qui fait la difficulté de la partie V est que la série de terme général $(w_k^{-1}x_k)$ n'est pas sommable, ce qui interdit de considérer la valeur en un point de sa transformée de Fourier comme une application linéaire continue (ou même simplement définie). Cette difficulté est levée dans la partie VI, où les hypothèses assurent cette sommabilité. On peut alors obtenir des sous-espaces invariants pour le décalage à l'aide d'ensembles (ici, des points) où la transformée de Fourier s'annule, puisque bien sûr cette transformée échange translation et produit par une exponentielle. La dernière question montre que les espaces invariants sont de dimension infinie, ce qui indique que les méthodes de compacité ne sont pas opérantes sur ce problème. Notons en conclusion que des méthodes plus fines (développées dans : A. Atzmon, G. Godefroy, N. J. Kalton : Invariant subspaces and the exponential map, *Positivity*, à paraitre) permettent de se passer de l'hypothèse de convexité de l'ensemble fermé invariant non trivial et également de travailler dans des espaces de Banach arbitraires.

Relevons à présent quelques erreurs souvent commises.

Partie 1 : La question 2.d), qui demandait l'usage de l'inégalité triangulaire dans $l^2(\mathbf{Z})$, a été très peu traitée. Dans la question 3.b), de nombreux candidats, comprenant qu'il s'agit de montrer qu'une application continue atteint sa borne inférieure, pensent à la compacité de C, mais celui-ci n'est pas compact pour la topologie définie par la norme. Une autre faute classique consiste à déduire l'unicité de v de l'unicité de la limite d'une suite convergente, alors qu'il faut réutiliser l'inégalité du a). La question 4, plus originale, était de nature géométrique. Très peu de candidats l'ont abordée.

Partie II : Dans la question 1, la compacité, toujours elle, est souvent invoquée, à tort bien entendu. L'emploi des quantificateurs donne lieu à des confusions : pour montrer que (ii) implique (iii), on part de l'expression de la continuité "pour tout ϵ, il existe δ tel que" pour continuer par "soit donc $\delta = 1$..." en oubliant que c'est ϵ qui est arbitraire et non δ. Dans la question 2.c), on déduit souvent de la convergence simple de (T_n) vers un opérateur T la convergence en norme, sans explication. Pour montrer 3.a), on passe parfois au sup dans l'inégalité

$$\|TS(x)\| \leqslant \|T(x)\|.\|S(x)\|$$

mais cette inégalité est fausse en général, ainsi que

$$\|T^j(x)\| \leqslant \|T(x)\|^j$$

pour 3.b). La convergence de la série qui définit l'exponentielle est pafois déduite du caractère borné en norme des sommes partielles, et même lorsque le critère de Cauchy est évoqué, la complètude de $L(l^2(\mathbf{Z}))$ que l'on vient pourtant d'établir est souvent oubliée. L'inégalité qui conclut cette partie n'a été abordée que dans les meilleures copies.

Partie III : Dans la question 2, de nombreux candidats ont montré l'implication "(ii) implique (i)" en trouvant une suite (t_k) qui dependait du vecteur (v_k) dans l'équation donnant T ; quelques-uns d'entre eux s'en sont inquiétés. Il était très tentant de déduire 4.b) de 4.a) au moyen de l'inclusion $T(Q) \subset Q$, mais cette dernière inclusion est fausse en général, et c'est à cette question qu'il faut utiliser la propriété algebrique de l'exponentielle établie à la question II.3.c).

Partie IV : Les questions non triviales de cette section, qui faisaient la synthèse entre les parties III et IV, ont été très peu traitées.

Partie V : Les trois premières questions de cette partie ont été abordées dans d'assez nombreuses copies, correctement à quelques oublis près. Il s'agissait avant tout de manipuler avec précision les indices. Dans la question 3.b), aucun candidat ne mentionne à l'occasion de l'isométrie entre E et $l^2(\mathbf{Z})$ l'unicité de l'espace euclidien séparable de dimension infinie, résultat de cours qui implique immédiatement l'existence d'une isométrie. La fin de la partie V, qui mettait en jeu la tranformée de Fourier, n'a été abordée que dans les meilleures copies.

Partie VI : Cette dernière partie était techniquement plus facile que la partie précédente. Sa position dans le problème fait que peu de candidats l'ont visitée, et le plus souvent dans le but de grappiller quelques points, qu'offrait la question 1 à tous ceux qui connaissent l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Épreuves orales

6 Rapport sur les épreuves orales

6.1 Considérations générales

Le jury est cette année relativement satisfait de la prestation orale des candidats. Cette satisfaction s'est traduite par une augmentation de la barre d'admission.

L'esprit des derniers programmes est, d'une manière générale, assez bien appréhendé, ainsi que la règle du jeu, et il semble que le concours ait atteint sa « vitesse de croisière ».

Par ailleurs, on constate d'année en année un rajeunissement de la population des candidats admis à l'agrégation interne et caerpa de mathématiques.

Puisque cette dernière tend à se rapprocher, par l'âge, de celle des lauréats du concours externe, il semble important, pour éviter le risque de laisser croire que les deux concours d'agrégation font *double emploi*, de renforcer la spécificité du concours interne. Ce dernier s'adresse en effet à des professeurs déjà en exercice depuis quelques années, et il est important de valoriser aussi bien leur expérience professionnelle que la réflexion qu'ils ont pu faire sur l'organisation des concepts impliqués dans l'enseignement des mathématiques.

Dans cet esprit, voici quelques pistes de réflexion qui pourraient orienter l'évolution du concours ces prochaines années (le *programme* est inchangé pour 2004).

6.1.1 Au niveau des programmes

- Renforcement de l'algorithmique ;
- introduction des statistiques inférentielles, du traitement du signal, de la modélisation géométrique (courbes de Bézier, B-splines) au niveau nécessaire pour qui doit les enseigner au lycée ou en BTS ;
- introduction des graphes.

6.1.2 Dans l'organisation des épreuves orales

Évolution d'une accumulation foisonnante d'épreuves orales très spécialisées vers un plus petit nombre d'épreuves orales plus synthétiques, demandant une meilleure maîtrise de l'enchaînement des concepts ; ces épreuves (leçons aussi bien qu'exercices) seraient regroupées en *thèmes* dont voici à titre d'exemple une liste non limitative :

- *Intervention de groupes ;*
- *angles ;*
- *affine et euclidien ;*
- *nombres ;*
- *suites et séries ;*
- *approximation ;*
- *aires, volumes et intégrales ;*
- *matrices ;*
- *coniques ;*
- *séries de fonctions ;*

- *équations différentielles ;*

- *extremums ;*

- *convexité ;*

- *courbes.*

Une modalité, dans un premier temps, pouvant être de donner au candidat, pour chaque épreuve, le choix entre une leçon traditionnelle et une leçon de synthèse.

6.2 La première epreuve orale

6.2.1 Modalités pratiques

Rappelons brièvement le déroulement de cette épreuve. Le candidat tire au sort une enveloppe contenant deux sujets, soit d'Algèbre et Géométrie, soit d'Analyse. Il devra choisir l'un des deux sujets et disposera de trois heures pour sa préparation ; le candidat n'annoncera son choix que lors de sa parution devant le jury.

L'épreuve se déroule en trois phases : présentation du plan, développement d'un point précis du plan choisi par le candidat, et questions du jury.

- La présentation du plan dure 15 mn au maximum (une durée de 10 mn semble le minimum acceptable), **sans interruption du jury**. Le plan doit tenir entièrement au tableau, sans effacer ; **il est donc exclu d'amorcer la moindre démonstration**. Le plan doit-être aussi riche que possible et peut contenir des exemples, contre-exemples et applications des outils introduits.
- Le but principal du développement est d'effectuer une démonstration consistante d'un (ou plusieurs) point(s) précis du plan, choisi(s) dans le cœur du sujet traité (Notons que durant cette phase le jury n'intervient pas, sauf éventuellement si le candidat se trouve en grande difficulté). Cette période dure 15 mm. Nous rappelons que **durant cette période le jury souhaite que le candidat s'efforce de faire son exposé sans avoir recours à ses notes**.
- La dernière phase, d'une durée de 15mn, est réservée aux questions du jury. Ces questions peuvent-être de divers ordres :
  - Rectifier certaines erreurs ou préciser certains points obscurs dans le plan ou dans l'exposé.
  - Vérifier la maîtrise et le recul du candidat sur le sujet traité. (Par exemple, la leçon « *définition de l'exponentielle complexe, fonctions trigonométriques, nombre π* » peut conduire à des questions sur la définition des angles et de leurs mesures, sur le lien entre le nombre « π » introduit ici et celui qui intervient dans la formule donnant le périmètre d'un cercle ...)

En particulier, le candidat doit pouvoir répondre sur tous les points présentés dans son plan ainsi qu'à toutes questions relatives au sujet, qu'il aurait omises volontairement ou non.

En conclusion, nous ne saurions trop encourager les futurs candidats à faire un gros effort de préparation afin d'affronter cette épreuve qui ne peut, en aucun cas, se borner à recopier un plan ou une démonstration découverts le jour de l'oral ; l'expérience montre que ce type de stratégie est souvent catastrophique pour le candidat qui s'effondre à la moindre question du jury, ce qui est du plus mauvais effet.

6.2.2 Remarques globales sur la première épreuve

D'une manière générale le jury souhaiterait :

- encourager les futurs candidats à donner une touche personnelle à leurs plans. Ceci ne peut se faire qu'au prix d'un travail régulier et approfondi durant l'année de préparation ; il serait illusoire de croire pouvoir construire et présenter une leçon solide, en compilant les informations

recueillies dans différents ouvrages pendant les trois heures de préparation. En particulier, il serait bon de réfléchir aux interactions possibles entre les divers sujets proposés et de les mettre en évidence.
– voir plus souvent choisis les exposés de *Probabilités, de Géométrie et de Mécanique* qui sont quasi-systématiquement délaissés : le jury saurait apprécier le choix d'un sujet rarement traité par les candidats.

6.2.3 Sur le plan

- Les plans doivent être structurés plus rigoureusement, en particulier :
  - l'enchaînement des énoncés est essentiel, il montre la vue d'ensemble du candidat par rapport à son sujet et permet d'éviter les répétitions et les cercles vicieux.
  - le statut des énoncés est fondamental : bien différencier la définition d'un concept d'une simple terminologie, un lemme d'une proposition, un corollaire d'un théorème fondamental, etc. . .Par exemple, bien que cela soit mathématiquement correct, il est maladroit d'énoncer globalement dans un plan « *Une suite de nombres réels est une suite de Cauchy si, et seulement si, elle est convergente* » En effet, la proposition « *Toute suite convergente est une suite de Cauchy* » est très élémentaire alors que la proposition « *Toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente* » est non triviale et se trouve au fondement de la théorie des nombres réels. Ainsi, du point de vue de la genèse des idées, un plan gagnera en clarté si ces deux énoncés sont présentés séparément et hiérarchiquement ; le premier pouvant d'ailleurs servir de motivation pour l'étude du second.
- les plans doivent être enrichis :
  - en introduisant des exemples et contre-exemples bien choisis montrant pour les théorèmes à la fois, leur pertinence, la nécessité des hypothèses, leurs limites d'applications. Par exemple, beaucoup de candidats citent le théorème de Weierstrass sans pouvoir produire une seule application, d'autres utilisent le théorème d'Abel radial pour aboutir à la convergence de la série harmonique alternée vers $\ln(2)$, ce qui est pour le moins peu pertinent ; néanmoins si l'on explique comment ce résultat peut-être établi de manière élémentaire, avec des outils de classe terminale, cela peut avoir un certain interêt pour montrer des aptitudes à faire le lien entre les mathématiques du supérieur et celles du secondaire.
  - en donnant de nombreuses applications, notamment des applications transversales. Par exemple, dans la leçon « *Déterminants. Applications* » il serait peut-être intéressant de parler de Wronskien en liaison avec les équations différentielles, de résultant en liaison avec les polynômes, de Jacobien en liaison avec les fonctions de plusieurs variables...
- Le niveau doit être plus ambitieux : s'il doit être conforme aux programme actuel du concours, il ne saurait se limiter à celui des lycées. Par exemple :
  - les exposés sur les groupes finis sont presque toujours d'un niveau trés élémentaire ; par exemple, l'utilisation du lemme de Cauchy et des notions de produit direct et semi-direct semblerait raisonnable pour donner plus de consistance à une leçon telle que « *Exemples de groupes finis* ».
  - Les exposés sur les séries entières ne devraient pas faire le silence sur les fonctions analytiques.
  - L'exposé « *Racines $n-$ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$* » culmine la plupart du temps à la construction du pentagone régulier. Sans aller jusqu'à parler de polynômes cyclotomiques, les candidats pourront trouver sans peine des sources d'applications dans les autres sujets de leçon, par exemple le calcul d'un déterminant circulant, le calcul de la somme de certains coefficients binômiaux, de somme de certaines séries entières ...

6.2.4 Sur l'exposé

Rappelons que le candidat est jugé sur le niveau de la démonstration, la qualité de sa prestation, mais aussi sur la pertinence du choix par rapport au sujet. Par exemple, choisir de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss dans la leçon « *Racines d'un polynôme à une indéterminée sur un corps commutatif, multiplicité. Relations entre coefficients et racines. Applications* » n'est certainement pas judicieux.

Ajoutons qu'il faut éviter, lorsqu'on a présenté un plan riche et ambitieux, de proposer de démontrer un point trivial, auquel cas, de toute façon, le candidat s'expose à être interrogé sur des points plus profonds de son plan.

D'une manière générale, il est conseillé de :

- choisir le développement **d'un point consistant**, **central par rapport au sujet**, permettant de montrer son aptitude à mettre en œuvre une certaine technicité liée aux notions étudiées et aux notions connexes.
- de donner la présentation la plus naturelle possible (l'utilisation de figures est recommandée chaque fois que cela est possible), faisant ressortir clairement la démarche scientifique utilisée en mettant bien en relief la (ou les) clef(s) de voûte de la preuve ; beaucoup de candidats se contentent d'aligner une suite de raisonnements qui conduisent des hypothèses à la conclusion, sans en avoir saisi les tenants et les aboutissants, tel un pilotage sans visibilité. Une telle attitude, donnant une image négative des qualités pédagogiques du candidat, est très préjudiciable.
- de bien réfléchir à chaque étape de la preuve que l'on devra exposer, afin qu'aucune subtilité ne passe inaperçue ; il arrive souvent qu'un candidat se trouve complètement désarçonné lorqu'on lui demande d'éclaircir certains passages, découvrant alors des difficultés qui lui avait échappé.

6.2.5 Sur les questions du jury

Les questions du jury peuvent porter aussi bien sur la conception, l'organisation du plan, que sur la (les) démonstration(s) abordée(s) au cours du développement. Elles peuvent aussi concerner certains prolongements omis, soit pour s'assurer de la solidité des connaissances, soit pour compléter un plan trop pauvre.

Elles peuvent également porter sur les autres points du plan non proposés au développement, y compris sur les pré-requis.

Cette dernière phase intervient pour une part très importante dans l'évaluation globale de cette épreuve. Par conséquent, elle ne doit pas être négligée par les candidats qui, bien au contraire, sont invités à s'y préparer de manière intensive ; la participation aux centres de préparation du concours devrait sans doute contribuer à développer cette aptitude au débat contradictoire, qui est l'essence-même de l'enseignement des mathématiques.

6.3 La seconde épreuve orale

Cette épreuve, préparée comme la précedente avec les documents de la bibliothèque de l'Agrégation Interne, durant trois heures, se déroule devant le jury en trois temps.

1. Exposé motivé d'un choix d'exercices illustrant le thème choisi par le candidat parmi les deux qu'il a tirés au hasard avant sa préparation.
2. Résolution commentée d'un exercice sélectionné par le candidat parmi ceux qu'il vient d'exposer.
3. Les questions du jury : elles peuvent porter sur la motivation, la résolution proposée, un autre exercice présenté par le candidat ou sur le thème.

Rappelons qu'à son arrivée devant le jury, le candidat lui remet des photocopies de son choix motivé d'une liste de quatre à sept exercices. Voici quelques remarques inspirées au jury par le concours 2003 sur ces trois points.

6.3.1 Sur l'exposé motivé des exercices

On a constaté cette année qu'une proportion, encore trop faible, mais désormais significative des admissibles (environ 10%) parvient à exposer convenablement des motivations consistantes relatives au plan d'ensemble ainsi qu'à chacun des exercices proposés.

- Il faut cependant regretter que, trop souvent, la sélection d'exercices envisagée par le candidat n'illustre que peu d'aspects du thème choisi. Même si, en la matière, toute prétention à l'exhaustivité est inenvisageable, la variété des motivations est un élément important de l'évaluation de ce point par le jury.
- On rencontre encore assez souvent des listes d'exercices élémentaires et non motivés. Il semble qu'une manière de lutter contre une telle dérive consiste à s'imposer de façon systématique de **présenter** chaque exercice comme un moyen de résoudre un problème plutôt que comme un problème destiné à illustrer un moyen. Cette pratique, dont la fécondité dans la pratique de l'enseignement n'est plus à démontrer, devrait être l'axe de toute proposition d'exercices au concours de l'Agrégation Interne. Les candidats sauront trouver les moyens de se préparer à cet aspect de la seconde épreuve en puisant dans leur pratique d'enseignants ainsi que dans leur travail de préparation au concours.
  Rappelons ici que les programmes en vigueur dans les classes terminales depuis 2002 insistent très clairement sur l'importance qu'il convient de donner à la présentation motivée des concepts. Les programmes 2004 accentuent encore cette tendance.
- Les rubriques « Exercices (sur le sujet A) faisant intervenir (le concept B) » doivent être interprétées par les candidats au sens propre ; c'est-à-dire que le concept B doit **inter**venir, autrement dit, dans l'idéal, il ne doit être ni l'origine ni l'aboutissement de l'exercice.
- Voici maintenant quelques exemples destinés à illustrer les commentaires ci-dessus qui concernent le choix des exercices.
  - Dans la rubrique 411 : « Exemples d'étude de fonctions définies par une série », il semble maladroit de balayer d'un revers de main la fonction ζ et l'exponentielle comme « trop classiques » pour leur substituer quatre exemples anecdotiques et simplistes dont aucun ne conduit à l'étude de la régularité (classe de la somme), l'un des quatre concernant d'ailleurs une série numérique, autant dire une fonction constante ! Ce faisant, le candidat se prive d'importantes motivations internes aux mathématiques. Bien entendu, on peut réussir une excellente leçon sur ce thème sans exercice sur la fonction ζ...
  - Dans les rubriques 427 et 428 : « Exemples de résolution d'équations différentielles scalaires » et « Exemples de résolution de systèmes différentiels », quatre équations ou systèmes linéaires explicites, présentés à froid, sans autre problème à résoudre, donnent une image très fausse de l'activité mathématique quel qu'en soit le niveau. Cette remarque s'applique à toutes les

rubriques. Un candidat ayant choisi de traiter le sujet 312 : « Exercices faisant intervenir des systèmes linéaires » ou le sujet 315 « Exercice faisant intervenir la réduction des endomorphismes » ne peut espérer une note convenable en résolvant des systèmes linéaires dont la seule variété réside dans le nombre des équations ou en élevant des matrices carrées à la puissance n. Le jury souhaite que le problème à résoudre vienne d'ailleurs : dénombrement, élucider une formule de récurrence si possible motivée, système différentiel provenant d'une modélisation…Les arguments qui concernent ladite motivation pouvant être solides et s'exposer en moins d'une minute.

– Dans la rubrique 337 « Exemples d'intervention des transformations planes pour l'étude de configurations et de lieux géométriques » la question isolée de savoir quelle est la similitude qui envoie les points untel et untel sur tels autres n'a absolument pas sa place puisque la **transformation** se trouve être à la fois l'alpha et l'oméga de l'exercice alors qu'elle ne doit être ni l'un ni l'autre !
– Dans la rubrique 305 « Exercices faisant intervenir les notions de $PGCD$ et $PPCM$ et mettant en œuvre des algorithmes associés », l'exercice consistant à démontrer, pour $P \in \mathbb{Q}[X]$, l'existence de $P_1 \in \mathbb{Q}[X]$ admettant les racines complexes de P rendues simples, a bien entendu sa place puisque $P_1 = \dfrac{P}{P \wedge P'}$ convient ; mais le candidat doit être en mesure d'aboutir explicitement si le jury lui propose un exemple.

6.3.2 Sur la résolution de l'exercice proposé

Le jury souhaite que les calculs entrepris soient expliqués. La stratégie doit être exposée oralement avec clarté avant et pendant la mise en œuvre de la résolution proprement dite. Dès cette étape, le jury attend du candidat qu'il se place en position de **dialogue**. Ces observations conduisent naturellement à la règle qui exige que le candidat dépose ses notes durant cette phase de sa prestation ; leur lecture ne peut en effet que le mettre dans une situation opposée à celle qu'attend le jury. Il va de soi d'autre part que le fait de jeter un coup d'œil aux notes au milieu d'un calcul long ou complexe ne sera pas reproché au candidat.

En revanche, il faut éviter à tout prix d'infliger aux examinateurs une succession de calculs qui n'apportent généralement aucun renseignement sur la maîtrise des notions théoriques, comportent le risque de commettre des erreurs et masquent souvent la véritable nature du problème. Les candidats devraient, d'autre part, ne rater aucune occasion de faire une figure en évitant toutefois de représenter un sous-espace vectoriel par une « patate », ce qui, en général, limite le nombre des questions qu'un tel dessin peut éclairer.

6.3.3 Sur les questions du jury

Durant environ un quart d'heure, le dialogue avec le jury devient l'essentiel de l'épreuve. Le jury éclaircit ou prolonge les deux premières phases, il peut demander au candidat de développer un ou plusieurs autres exercices qu'il a proposés lesquels doivent donc être maîtrisés. Enfin, le jury peut proposer un exercice qui lui semble propre à élucider un point obscur ou absent de l'ensemble de la présentation du candidat.

6.3.4 Commentaire général sur la seconde épreuve

Certains candidats exploitent mal leur culture. Il arrive en effet que des connaissances livresques existent qui sont plus souvent utilisées comme « arguments d'évidence » que comme les véritables instruments d'une compréhension maîtrisée. Un candidat qui utilise des résultats sur les *mineurs* pour étayer une argumentation sur le *rang* d'une matrice et qui reste obstinément muet lorsqu'on lui demande pourquoi des colonnes liées le restent lorsqu'on en supprime une ligne, se trompe sur la nature du discours qu'on attend de lui. A propos du niveau attendu pour cette épreuve, disons-le tout net : la diagonalisation d'une matrice explicite de $M_3(\mathbb{Q})$ à spectre dans $\mathbb{Z}$, la résolution d'un système linéaire explicite de 3 équations à trois inconnues ; la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle comme $\dfrac{1}{X(X^2+1)^2}$ ne peuvent fonder une prestation du niveau de l'Agrégation Interne. A l'inverse, on a pu constater qu'un candidat n'ayant proposé que des résultats classiques mais consistants d'arithmétique : *théorèmes de Fermat, de Wilson et des restes chinois*, pouvait se révéler incapable de résoudre un système de deux congruences compatibles ! A ce sujet, une motivation sérieuse pourrait consister à expliquer en une minute, sur un exemple simple, la dénomination « *Théorème chinois* » en traitant le problème de la modélisation élémentaire de deux ou trois phénomènes périodiques rationnels (par exemple, planétaires).

On peut rappeler ici que les candidats auront intérêt à exploiter les ressources que le web met à leur disposition pour se préparer à cet aspect de la seconde épreuve.

En résumé, les exercices présentés doivent être motivés et motivants. Il n'est nul besoin d'être spécialiste en Biologie, Economie, Démographie, Physique, Chimie ou Astronomie pour présenter en très peu de temps un exercice modélisant élémentairement mais de façon argumentée une question qui ressortit à l'un de ces domaines. Il est difficile, en revanche, d'improviser une telle présentation le jour de l'épreuve ; s'y refuser systématiquement donne une image fausse et dévalorisante des mathématiques.

On a trop souvent vu des sélections d'exercices manifestement recopiées dans des cours « préemballés », qui ne correspondent absolument pas à l'esprit de cette épreuve qui évalue, au contraire l'aboutissement d'une réflexion personnelle et d'un travail soigneux de préparation en profondeur, articulé sur les remarques de ce rapport. Ce travail doit permettre aux candidats d'exploiter leurs qualités professionnelles en motivant leurs exemples et de consolider leurs connaissances en proposant des exercices de niveau universitaire. Par exemple, dans la rubrique 317 : « Exercices faisant intervenir des projecteurs et des symétries », il ne faut pas se limiter à des constructions géométriques dans le plan et dans l'espace. On peut, par exemple, proposer un exercice de minimisation d'une intégrale ; en donner l'interprétation au sens des moindres carrés peut constituer une motivation convaincante. On peut, toujours sur ce sujet, songer aux sommes partielles des séries de Fourier et illustrer ainsi diverses manières d'interpréter la notion approximation...

Le jury souhaite enfin qu'un exercice soit **assumé de façon globale** depuis la motivation jusqu'aux calculs effectifs en passant par les points du programme de l'agrégation qu'il illustre. Le jury d'autre part ne reprochera pas au candidat de ne pas avoir songé aux liens plus cachés qui pourraient corréler un des exercices à tel ou tel prolongement évoqué par un de ses membres. Le candidat ne doit pas se laisser effrayer par les questions du jury. Comme chaque année, on a pu voir des candidats, finalement particulièrement bien notés, quitter la salle de leur épreuve avec l'impression d'une contre-performance catastrophique simplement parce qu'à la fin de leur prestation ils ne savent plus répondre aux questions du jury.

Il va de soi que les remarques concernant la motivation d'un choix d'exercices s'ajoutent sans s'y substituer aux observations habituelles sur le bien-fondé pédagogique de la progression qu'illustre ce choix et sur les éclairages conceptuels internes aux mathématiques qu'il vise.

Le caractère motivé, effectif et solide de cette épreuve peut et doit être considérablement amélioré sans qu'elle devienne une épreuve de « modélisation ». Les élèves auxquels l'enseignement secondaire s'adresse sont en effet censés acquérir un ensemble cohérent de connaissances mathématiques et non des compétences d'ingénieurs ou de chercheurs. Il est clair d'autre part qu'ils ne peuvent comprendre l'intérêt des mathématiques qui leurs sont présentées sans exemples à la fois complexes et concrets lesquels accompagnent naturellement l'indispensable processus d'**abstraction** des idées qui reste le but premier de toute forme d'enseignement généraliste fondé sur la pensée.

Titres des leçons

6.4 Sujets de leçons et d'exercices

LEÇONS D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

101. Parties génératrices d'un groupe (les généralités sur les groupes seront supposées connues). Exemples.
102. Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.
103. Exemples de groupes finis. Applications.
104. Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
105. Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications.
106. Congruences dans $\mathbf{Z}$, anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.
107. Propriétés élémentaires liées à la notion de nombre premier.
108. PGCD, PPCM dans $\mathbf{Z}$, théorème de Bézout. Applications.
109. PGCD dans $K[X]$, théorème de Bézout. Applications.
110. Base de numération d'entiers. Applications.
111. Écriture décimale d'un nombre réel ; cas des nombres rationnels.
112. Polynômes irréductibles à une indéterminée sur un corps commutatif. Factorisation. Cas des corps $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.
113. Racines d'un polynôme à une indéterminée sur un corps commutatif, multiplicité. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Applications.
114. Racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbf{C}$.
115. Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une application linéaire.
116. Sommes et sommes directes de sous–espaces vectoriels d'un espace vectoriel. Applications.
117. Rang en algèbre linéaire (on se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie).
118. Formes linéaires, hyperplans, dualité (on se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie).
119. Endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, polynôme d'endomorphisme.
120. Changements de bases en algèbre linéaire (applications linéaires, formes bilinéaires...). Applications.
121. Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications.
122. Déterminants. Applications.
123. Trigonalisation des endomorphismes, sous–espaces caractéristiques. Applications.
124. Endomorphismes diagonalisables.
125. Groupe des homothéties-translations dans le plan. Exemples et applications.
126. Espaces vectoriels euclidiens (dimension finie). Groupe orthogonal.
127. Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3.
128. Formes quadratiques sur un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{C}$. Classification dans chacun des deux cas.

129. Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien (dimension finie). Applications.
130. Endomorphismes hermitiens en dimension finie.
131. Formes quadratiques sur un espace vectoriel euclidien (dimension finie), applications géométriques (les généralités sur les formes quadratiques seront supposées connues).
132. Applications géométriques des nombres complexes.
133. Similitudes planes directes et indirectes, formes réduites.
134. Isométries du plan affine euclidien, formes réduites. Applications.
135. Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3, formes réduites.
136. Géométrie du triangle. Relations métriques et trigonométriques.
137. Barycentres. Applications.
138. Orientation d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3, produit mixte, produit vectoriel, applications.
139. Droites et plans dans l'espace.
140. Projecteurs et symétries dans un espace affine de dimension finie.
141. Polygones réguliers dans le plan.
142. La parabole dans le plan affine euclidien.
143. L'ellipse dans le plan affine euclidien.
144. L'hyperbole dans le plan affine euclidien.
145. Coniques dans le plan affine euclidien.
146. Cercles dans le plan affine euclidien.
147. Étude locale des courbes planes paramétrées.
148. Propriétés métriques locales des courbes de l'espace, en dimension 3.
149. Propriétés métriques locales des courbes planes.
150. Mouvement à accélération centrale.
151. Cinématique du point : vitesse, accélération. Exemples de mouvements.

EXERCICES D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

301. Exercices sur les groupes finis.
302. Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans **Z**.
303. Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.
304. Exercices faisant intervenir les nombres premiers.
305. Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM et mettant en œuvre des algorithmes associés.
306. Exercices faisant intervenir des dénombrements.
307. Exercices faisant intervenir les relations entre coefficients et racines d'un polynôme.
308. Exercices faisant intervenir polynômes et fractions rationnelles sur **R** ou **C**.
309. Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.
310. Exercices faisant intervenir la notion de rang.
311. Exercices sur les matrices carrées inversibles.
312. Exercices faisant intervenir des systèmes linéaires.
313. Exercices faisant intervenir des déterminants.
314. Exemples de recherche et d'emploi de vecteurs propres et valeurs propres.
315. Exercices faisant intervenir la réduction des endomorphismes.
316. Exercices sur les endomorphismes diagonalisables.
317. Exercices faisant intervenir des projecteurs ou des symétries.
318. Exemples de méthodes et d'algorithmes de calcul en algèbre linéaire.
319. Exercices sur les isométries vectorielles dans les espaces euclidiens en dimension 2 et en dimension 3.
320. Exercices faisant intervenir la réduction des matrices réelles symétriques.
321. Exercices sur les formes quadratiques.
322. Exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.
323. Exercices faisant intervenir des similitudes planes directes et indirectes.
324. Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimension 2 et en dimension 3.
325. Exercices faisant intervenir la notion de barycentre.
326. Exemples de propriétés affines et de propriétés métriques en dimension 2 et en dimension 3.
327. Exercices sur les aires et les volumes de figures simples.
328. Exercices faisant intervenir les notions d'angles et de distances en dimension 2 et en dimension 3.
329. Exercices sur la cocyclicité.
330. Exercices sur les cercles.
331. Exercices de géométrie plane faisant intervenir la notion d'angle.
332. Exercices de géométrie plane faisant intervenir des triangles isométriques ou semblables.
333. Exercices sur les coniques.

334. Exemples d'étude de courbes planes.
335. Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure...).
336. Exercices sur les propriétés métriques des courbes de l'espace.
337. Exemples d'intervention de transformations planes pour l'étude de configurations et de lieux géométriques.
338. Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.
339. Exemples de groupes en géométrie.
340. Exercices de géométrie en dimension 3.
341. Exercices de construction en géométrie plane.
342. Exemples de choix de repères pour la résolution d'exercices de géométrie en dimension 2 et en dimension 3.
343. Exercices de cinématique du point.
344. Exemples d'étude de problèmes de mécanique du point.
345. Exercices sur les triangles.

LEÇONS D'ANALYSE

201. Suites de nombres réels.
202. Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence.
203. Approximations d'un nombre réel par des suites. Rapidité de convergence.
204. Approximations d'un nombre irrationnel par des nombres rationnels.
205. Approximations d'une solution d'une équation numérique.
206. Séries à termes réels positifs.
207. Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi–convergence (les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs étant supposés connus).
208. Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes.
209. Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Applications à l'approximation des fonctions.
210. Parties compactes de $\mathbf{R}^n$. Fonctions continues sur une telle partie.
211. Parties connexes de $\mathbf{R}$. Fonctions continues sur une telle partie.
212. Parties connexes par arcs de $\mathbf{R}^n$; exemples. Applications.
213. Théorème du point fixe pour les contractions d'une partie fermée d'un espace vectoriel normé complet ; applications.
214. Suites de fonctions : divers modes de convergence et comparaison de ces divers modes de convergence.
215. Séries de fonctions : convergence uniforme, convergence normale (les résultats relatifs aux suites de fonctions sont supposés connus). Propriétés de la somme, exemples.
216. Séries entières. Rayon de convergence. Propriétés de la somme.
217. Développement d'une fonction en série entière ; exemples et applications.
218. Définition de l'exponentielle complexe et des fonctions trigonométriques, nombre π.
219. Séries de Fourier. Divers modes de convergence. Exemples.
220. Propriétés de la limite d'une suite de fonctions d'une variable réelle (les divers modes de convergence étant supposés connus).
221. Dérivabilité de la somme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$. Applications.
222. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.
223. Théorème de Rolle : applications
224. Continuité, continuité uniforme de fonctions numériques définies sur un intervalle. Applications.
225. Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
226. Fonctions définies sur un intervalle à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^n$: dérivabilité, accroissements finis.
227. Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle et applications.
228. Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle : cas d'une fonction continue, cas d'une fonction dérivable. Exemples.
229. Calcul de valeurs approchées d'une intégrale. Exemples d'estimation de l'erreur.

230. Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$.
231. Définition de l'intégrale sur un intervalle compact d'une fonction numérique continue. Propriétés.
232. Intégrales dépendant d'un paramètre. Applications.
233. Équations différentielles linéaires d'ordre deux : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbf{R}$.
234. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants ; écriture matricielle ; exponentielle d'une matrice.
235. Systèmes différentiels linéaires $Y' = AY$ à coefficients réels constants en dimension 2. Allure des trajectoires.
236. Équations différentielles linéaires à coefficients constants.
237. Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentielle. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Fonctions composées.
238. Fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbf{R}^n$. Inégalités des accroissements finis. Applications
239. Formule de Taylor–Young pour les fonctions de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$. Applications à la recherche d'extremums.
240. Suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli, variable aléatoire de loi binomiale.
241. Probabilité conditionnelle et indépendance.
242. Espérance, variance, covariance, loi faible des grands nombres.
243. Lois usuelles de variables aléatoires possédant une densité : loi uniforme sur un intervalle borné, loi exponentielle, loi normale.

EXERCICES D'ANALYSE

401. Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes.
402. Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.
403. Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.
404. Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.
405. Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.
406. Exemples de comportement asymptotique de suites ; rapidité de convergence ou de divergence.
407. Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.
408. Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.
409. Exercices sur les suites de polynômes orthogonaux.
410. Comparaison sur des exemples de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions d'une variable réelle.
411. Exemples d'étude de fonctions définies par une série.
412. Exemples de développements en série entière. Applications.
413. Exemples d'emploi de séries entières ou trigonométriques pour la recherche de solutions d'équations différentielles.
414. Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.
415. Exemples d'applications du théorème des accroissements finis pour une fonction numérique d'une variable réelle.
416. Exemples d'encadrements de fonctions numériques ; utilisations.
417. Exemples d'approximations de fonctions numériques ; utilisations.
418. Exemples d'utilisation de développements limités.
419. Exemples d'utilisation d'intégrales pour l'étude de suites et de séries.
420. Exemples d'utilisation de suites ou de séries pour l'étude d'intégrales.
421. Exemples de calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
422. Exemples d'étude d'intégrales impropres.
423. Exemples d'intégration sur un intervalle.
424. Exemples de calculs d'aires et de volumes.
425. Exemples de calculs d'intégrales multiples.
426. Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.
427. Exemples de résolution d'équations différentielles scalaires.
428. Exemples de résolution de systèmes différentiels.
429. Exemples d'équations différentielles simples issues des sciences expérimentales ou de l'économie.
430. Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une variable, d'une fonction numérique de deux variables.
431. Exemples d'approximations d'un nombre réel.

432. Approximations du nombre π.
433. Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse.
434. Exemples d'étude probabiliste de situations concrètes.
435. Exemples de modélisation probabiliste.
436. Exemples de variables aléatoires et applications.
437. Exemples de problèmes de dénombrement.
438. Exemples de calculs de la norme d'une application linéaire continue.
439. Exemples de calculs de la longueur d'un arc de classe $\mathcal{C}^1$.

Bibliothèque de l'agrégation

7 Bibliothèque de l'agrégation de mathématiques

AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices	Masson
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques Tomes 1A,1B,2,3,4,5,6,7	Ellipses
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	Dunod
ANDREWS G.	Number Theory	Dover
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG.	ESKA
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie Tome I Tome II	Ellipses
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse	Dunod
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus tome 4	Dunod
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques 1. Algèbre 2. Analyse 3. Compléments d'analyse 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	Dunod
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Equations différentielles ordinaires	MIR
ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gauthier-Villars
ARTIN M.	Algebra	Prentice Hall

AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée Tomes 1 et 2	PUF
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	Belin
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel	Masson
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANEER J.	Analyse numérique	Hermann
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	Dunod
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre	Diderot, éditeur Arts et Sciences
BASS J.	Cours de Mathématiques Tome 1 Tome 2	Masson
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	Mac Graw Hill
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle	Armand Colin
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	Cédic/Nathan

BERGER M.	Géométrie tome 2	Nathan
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics	Oxford Science Publications
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF
BOAS R.	A primer of real functions	The mathematical association of America
BONNANS **GILBERT** **LE MARECHAL** **SAGASTIZABAL**	Optimisation numérique	Springer
BOURBAKI N.	Eléments de Mathématique Topologie générale, chapitres V à IX Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII Intégration, chapitres I à IV.	Hermann
BOUVIER **A. RICHARD D.**	Groupes	Hermann
BREMAUD P.	Introduction aux probabilités	Springer
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	Masson
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	Armand Colin
BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics	Cambridge
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire 1. Espaces vectoriels , Polynômes 2. Matrices et réduction	Ellipses
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	Dunod
CAGNAC G. **THIBERGE L.**	Géométrie. Classes terminales C et T	Masson

CALAIS J.	Anneaux-Corps vol. 1 Éléments de théorie des anneaux	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF
CARREGA J.C.	Théorie des corps	HERMANN
CARTAN H.	Calcul différentiel	HERMANN
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel	HERMANN
CARTAN H.	Formes différentielles	HERMANN
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	HERMANN
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	PRENTICE HALL
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	MASSON
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 2,3	MASSON
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	MASSON
CHEVALLARD Y.	Théorie des séries 1. Séries numériques	CÉDIC/NATHAN
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	SPRINGER-VERLAG
CHOQUET G.	Cours d'analyse TomeII : Topologie	MASSON
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	HERMANN
CHRISTOL G.	Algèbre 1	ELLIPSES

CHRISTOL G.	Algèbre 2	Ellipses
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	Masson
COHN P.M.	Algebra Volume 1	John Wiley
COLLET P.	Modeling binary data	Chapman et Hall
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics Volume 1 Volume 2	John Wiley
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	John Wiley
CROUZEIX M. **MIGNOT A.**	Analyse numérique des équations différentielles	Masson
CVITANOVIC P.	Universality in Chaos	Institute of Physics Publishing
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe	Masson
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	Masson
DE KONNINCK **MERCIER**	Introduction à la théorie des nombres	Modulo
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale	Que-sais-je ? PUF

DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	Dunod
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments	Jacques Gabay
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU Grenoble
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	Ellipses
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	Cassini
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF
DIEUDONNE J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	Hermann
DIEUDONNE J.	Calcul infinitésimal	Hermann
DIEUDONNE J.	Sur les groupes classiques	Hermann
DIEUDONNE J.	Éléments d'Analyse. 2	Gauthier-Villars
DIEUDONNE J.	Éléments d'Analyse. Fondements de l'analyse moderne	Gauthier-Villars
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle Première année Deuxième année	Gauthier-Villars
DRAPPER N. **SCHMITH H.**	Applied regression analysis	Wiley
DUBREIL P. **DUBREIL-JACOTIN M.L.**	Leçons d'Algèbre moderne	Dunod

DUBUC S.	Géométrie plane	PUF
DYM H. **ITEAN Mac H.P.**	Fouriers series and integrals	ACADEMICS PRESS
EL KACIMI ALAOUI A.	Quelques aspects des mathématiques actuelles	ELLIPSES
EPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes Analyse. Volume 1 Algèbre.	CÉDIC/NATHAN
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse Analyse 2 : Éléments de topologie générale	HATIER
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	ELLIPSES
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications Volume 1 Volume 2	JOHN WILEY
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	MASSON
FLORY G.	Exercices de toplogie et analyse. Tomes 1,2,3,4	VUIBERT
FOATA D. **FUCHS A.**	Calcul des probabilités	MASSON
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques oraux X-ens Algèbre 1	CASSINI
FRANCINOU S.	Exercices de Mathématiques Algèbre 1	MASSON

FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève et le professeur	Hermann
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR Maths Bordeaux
FRESNEL J.	Géométrie	IREM de Bordeaux
FRESNEL J.	Anneaux	Hermann
FRESNEL J.	Groupes	Hermann
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	Springer
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	Cassini
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices Tome 1 Tome 2	Dunod
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	Vuibert
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	Springer
GOBLOT R.	Algèbre commutative	Masson
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	Masson
GODEMENT R.	Analyse tome 3	Springer
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	Hermann
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations	Wiley
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation I Topologie et Analyse fonctionnelle	Ellipses

GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales Tomes 1,2,3,4	PUF
GOURDON X.	Algèbre	Ellipses
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' : analyse	Ellipses
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	Hermann
GRAMAIN A.	Intégration	Hermann
GREUB W.	Linear Algebra	Springer Verlag
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction)	Oxford
GUICHARDET A.	Calcul intégral. Maitrise de Mathématiques C. 2	Armand Colin
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	Wiley
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands	Cassini
HAMMAD P. et TARANCO A.	Exercices de probabilités	Cujas
HAMMAD P.	Cours de probabilités	Cujas
HAMMER **HOCKS** **KULISH** **RATZ**	C++ toolbox for verified computing	Springer
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers	Oxford
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications	Masson

HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis Volume 1,2,3	Wiley-Interscience
HERVE M.	Les fonctions analytiques	PUF
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle	Masson
HIRSCH **LACOMBE**	Éléments d'analyse fonctionnelle	Masson
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	Belin
HUBBARD **WEST**	Équations différentielles et systèmes dynamiques	Springer
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	Springer-Verlag
IREM des Pays de Loire	Exercices de géométrie élémentaires	
ITARD J.	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra Tome I Tome II	Freeman and Co
KAHANE **CARTIER** **ARNOLD et al.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui	Cassini
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis	Dover
KERBRAT Y. **BRAEMER J-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces	Hermann
KNUTH D.E.	The art of computer programming Volume 1 : Fundamental algorithms Volume 2 : Seminumerical algorithms Volume 3 : Sorting and Searching	Addison-Wesley
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	Ellipses

KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	DUNOD
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier Analysis	CAMBRIDGE
KÖRNER T.W.	Fourier Analysis	CAMBRIDGE
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUG
LANG S.	Algèbre linéaire Tome 1 Tome 2	INTEREDITIONS
LANG S.	Algebra	ADDISON-WESLEY
LANG S.	Linear Algebra	ADDISON-WESLEY
LANG S.	Linear Algebra	ADDISON-WESLEY
LAVILLE	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES
LAX D.	Linear Algebra	WILEY
LE BRIS G.	Maple Sugar	CASSINI
LEBOEUF C. **GUEGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités	ELLIPSES
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSE S. **HEMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques	JACQUES GABAY

LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation	Masson
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales 1 : Topologie 3 : Intégration et sommation 4 : Analyse en dimension finie 5 : Analyse fonctionnelle	Masson
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques Tomes 1,2,3,4	Ellipses
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques Tome 1 : Algèbre Tome 2 : Analyse Tome 3 : Géométrie et cinématique Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples	Dunod
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	Masson
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory	Springer
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	Masson
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	Masson
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	Hermann
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle Tome 1 : Exercices et corrigés Tome 2 : Exercices et corrigés Tome 3 : Exercices et corrigés Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	De Boeck Université
MAZET P.	Algèbre géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses

MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	Springer
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF
MNEIMNE R.	Eléments de géométrie : action de groupes	Cassini
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	Hermann
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales : Analyse : suites et séries de fonctions	Ellipses
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries	Ellipses
MONIER J.M.	Algèbre et géométrie MPSI Algèbre et géométrie MP Analyse MPSI, Analyse MP	Dunod
MONIER J.M.	Cours de mathématiques Algèbre 1, Algèbre 2 Analyse 2, Analyse 4	Dunod
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique Tome 1 Tome 2	Vuibert
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités	Dunod
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction . Ecole Polytechnique	Ellipses
Mac LANE S. **BIRKHOFF G. Algèbre**	1 : Structures fondamentales 2 : Les grands théorèmes	Gauthier-Villars
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	Masson

NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités	Masson
NIVEN I.	Irrational numbers	The Mathematical Association of America
NORRIS J.R.	Markov chains	Cambridge
OPREA J.	Differential geometry	Prentice hall
OUVRARD J.Y.	Probabilités 1	Cassini
OUVRARD J.Y.	Probabilités 2	Cassini
PAPINI O.	Algèbre discrète et codes correcteurs	Springer
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course	Dover
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	Springer
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	Ellipses
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	Cassini
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	Ellipses
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis Volume I Volume II	Springer-Verlag
QUEFFELEC H. **ZUILY Cl.**	Eléments d'analyse pour l'agrégation	Masson
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first curse in numerical analysis	Internatinal Student Edition

RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales 1- Algèbre 2- Algèbre et applications à la géométrie 3- Topologie et éléments d'analyse 4- Séries et équations différentielles 5- Applications de l'analyse à la géométrie	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions Algèbre - Analyse 1,2	Masson
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	Hermann
RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle	Gauthier-Villars
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	Springer
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières	Cédic/Nathan
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP Sciences
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation	Cassini
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	Masson
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	Masson
RUDIN W.	Functional analysis	Mac Graw-Hill
RUDIN W.	Real and complex analysis	Mac Graw-Hill
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques	Masson
SAMUEL P.	Géométrie projective	PUF

SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	Hermann
SARMANT	Analyse 1	Ellipses
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre	Springer
SCHWARTZ L.	Analyse I Topologie générale et analyse fonctionnelle II Calcul différentiel et équations différentielles	Hermann
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse	Hermann
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques	Hermann
SEDGEWICK R.	Algorithms	Addison Wesley
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SERVIEN Cl.	Analyse 3	Ellipses
SERVIEN Cl.	Analyse 4	Ellipses
SIDLER J.C.	Géométrie Projective	Dunod
STEWART I.	Galois theory	Chapman and Hall
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	Cassini
TAUVEL P.	Géométrie	Masson
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	Masson
TENENBAUM G.	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S. M. F.

TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	Institut Elie Cartan
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	Bréal
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	Oxford
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	Masson
TOSEL N.	Topologie et Séries.	Ellipses
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique I Théorie des fonctions II Equations fonctionnelles - Applications	Masson
VAUQUOIS B.	Outils Mathématiques. Probabilités	Hermann
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	Masson
VEIGNEAU S.	Approche impérative et fonctionnelle de l'algorithmique	Springer
WARUSFEL A.	Cours de mathématiques spéciales.	DUNOD
WARUSFEL A.	Cours de mathématiques supérieures.	DUNOD
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	Classiques Hachette
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis	Cambridge
WILF H.	Generatingfunctionology	Academic Press
YALE P.B.	Geometry and Symmetry	Dover

YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics	Dover