Séries de Fourier

Notations : C_P^k les fonctions de $C^k(\mathbb{R},\mathbb{C})$ $P-$périodiques et $\widetilde{C}_P^k$ les fonctions C^k par morceaux et $P-$périodiques,

Si $f \in L^2(]0,P[,\mathbb{C})$, $c_n[f] := \dfrac{1}{P}\displaystyle\int_0^P f(t)\exp(-in\omega t)dt$, $n \in \mathbb{Z}$, avec $\omega = \dfrac{2\pi}{P}$,

Si $f \in L^2(]0,P[,\mathbb{R})$, $a_n[f] := \dfrac{2}{P}\displaystyle\int_0^P f(t)\cos(n\omega t)dt$, $\quad n \geq 0$, $\quad b_n[f] := \dfrac{2}{P}\displaystyle\int_0^P f(t)\sin(n\omega t)dt$, $\quad n \geq 1$,

$$S_N[f](t) := \sum_{|n|\leq N} c_n[f]\exp(in\omega t) = \frac{a_0[f]}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n[f]\cos(n\omega t) + b_n[f]\sin(n\omega t)),$$

$$S[f](t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n[f]\exp(in\omega t) = \frac{a_0[f]}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n[f]\cos(n\omega t) + b_n[f]\sin(n\omega t)) = \lim_{N\to\infty} S_N[f](t).$$

$$\|f\|_2^2 := \frac{1}{P}\int_0^P |f(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n[f]|^2 = \frac{1}{4}|a_0[f]|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n[f]|^2 + |b_n[f]|^2).$$

1 Créneaux et dents de scie

Pour les fonctions de période 2π suivantes, calculer leur série de Fourier. Puis étudier la convergence simple et uniforme de ces séries de Fourier.

1. f est impaire, et $f(t) = 1$ sur $]0,\pi[$.
2. $f(0) = 0$, $f(t) = \dfrac{\pi - t}{2}$ sur $]0, 2\pi[$. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

2 Régularité et décroissance des coefficients de Fourier

1. Soit $f \in L^2(]0,P[,\mathbb{C})$ telle que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n[f]|$ converge. Montrez que, $f \in C_P^0$, i.e. f admet pour représentant continue $S[f]$.
2. On suppose que $f \in C_{2\pi}^1$. Montrer que $c_n[f'] = inc_n[f]$. On dérivera formellement la série de Fourier de f. On justifiera ce calcul à l'aide d'une intégrations par parties sur l'intégrale qui définit $c_n[f]$.
3. On suppose que $f \in C_{2\pi}^k$, où $k \geq 2$. Montrez que $c_n[f^{(k)}] = i^k n^k c_n[f]$. En déduire que $c_n[f] = o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$, $\|f - S_N[f]\|_\infty = o\left(\dfrac{1}{n^{k-1}}\right)$, $\|f - S_N[f]\|_2 = o\left(\dfrac{1}{n^{k-1/2}}\right)$.
4. Réciproquement, si $f \in L^2(]0,P[)$ et $c_n[f] = O\left(\dfrac{1}{n^{k+2}}\right)$, montrez que f admet un représentant dans C_P^k.
5. Caractérisez les fonctions de C_P^∞ à l'aide de leurs coéfficients de Fourier.
6. Montrez que $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{n!}$, $t \in \mathbb{R}$, est dans $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donnez une formule explicite de f.

3 Inégalités de Poincaré : $\|f\|_2 \leq C\|f'\|_2$

1. Trouvez la constante optimale C_1 telle que pour tout $f \in C^0 \cap \widetilde{C}_P^1$ de moyenne nulle sur $[0,P]$, $\|f\|_2 \leq C_1\|f'\|_2$.
2. Calculez la plus petite constante C_2 telle que: $\forall f \in C^0 \cap \widetilde{C}^1([0,P],\mathbb{C})$, $f(0) = f(P) = 0 \Longrightarrow \|f\|_2 \leq C_2\|f'\|_2$. (On pourra prolonger f par imparité à $[-P,P]$ ou la développer en série de sinus.)
3. Traitez la même question avec une constante C_3 en supposant seulement que $f \in C^0 \cap \widetilde{C}^1([0,P],\mathbb{C})$ et $f(0) = 0$.

périodique régulière superconverge !

Soit $k \geq 2$, $f \in C^k_{2\pi}$, $N \in I\!N - \{0\}$, $h = \dfrac{2\pi}{N}$, $x_l = lh$ pour $l = 0, 1, \ldots, N$.

Démontrez ce résultat trés surprenant et trés utile: $R_N(f) := h \sum_{l=1}^{N} f(x_l) = \int_0^{2\pi} f(x)dx + O\left(h^k\right)$.

5 $f \star g(x) := \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$, f, $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $2\pi-$périodiques .

1. Montrez que: $f \star g = g \star f$, $c_n[f \star g] = c_n[f]c_n[g]$, $n \in Z\!\!\!Z$, $f \star g \in C^0_{2\pi}$, et de plus, si $g \in C^\infty$ alors $f \star g \in C^\infty$.
2. Une application: Résoudre l'équation fonctionelle suivante $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour presque tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dans l'espace des fonctions de $L^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $2\pi-$périodiques. (On pourra étudiez $f \star g$ avec $g \in C^\infty_{2\pi}$).

6 Résolution d'équations différentielles à coefficients constants.

1. Fourier, (et un Bernoulli un siècle avant), avaient développé des fonctions en séries de sinus pour résoudre l'équation de la chaleur (l'équation des cordes vibrantes). Montrez que toute fonction de $L^2(]0, \pi[, \mathbb{R})$ admet un unique développement de la forme $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \sin(nx)$ dans $L^2(]0, \pi[, \mathbb{R})$. Explicitez les coefficients f_n. (On prolongera f par imparité et $2\pi-$ périodicité.).
2. Trouvez la série de sinus de u en fonction des coefficients de celle de f, pour u solution du problème de Dirichlet suivant:
$$\begin{cases} -\dfrac{d^2}{dx^2}u(x) = f(x), \quad 0 < x < \pi, \\ u(0) = 0 = u(\pi) \end{cases}$$
On pourra commencer par le cas où f est impaire et $f \in C^\infty_{2\pi}$, puis on affaiblira les hypothèses de régularités sur f.
3. Pour u_0, u_1 données, appliquez la même méthode pour résoudre l'équation de la chaleur:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) = 0, & 0 < t, 0 < x < \pi, \\ u(t,0) = 0 = u(t,\pi), & t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), & 0 < x < \pi \end{cases}$$
et l'équation des cordes vibrantes:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) - c^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) = 0, & 0 < t, 0 < x < \pi, \\ u(t,0) = 0 = u(t,\pi), & t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), & 0 < x < \pi \\ \frac{\partial}{\partial t}u(0,x) = u_1(x), & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Références: Kahane, Korner, Krée & Vauthier, Moisans-Vernotte-Tosel, Rudin ...