Suites et séries de fonctions intégrables

(f_n) et (u_n) sont des suites de fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On fera de nombreux liens entre la convergence dans L^1, la convergence presque partout et la convergence des intégrales. exemple 0: si (f_n) converge dans L^1 alors $\lim \int f_n = \int \lim f_n$.

1 Les théorèmes de bases

1. L^1 est un espace de Banach.

2. Les théorèmes "positifs": $f_n \geq 0$ pour tout n

   (a) *convergence monotone*: si $f_{n+1} \geq f_n$ pour tout n alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx \in [0,+\infty]$.

   (b) *lemme de Fatou*: $\int_{\mathbb{R}} \liminf f_n(x)dx \leq \liminf \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx \in [0,+\infty]$.

   (On n'utilisera pas ici le théorème de *Fubini* (quoique) et de *changement de variables*)

3. *Le théorème de convergence dominée de Lebesgue*: Si $g(x) = \sup\limits_n |f_n(x)| \in L^1$ et (f_n) converge presque partout vers f alors $f \in L^1$, $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

De ces théores se déduisent de nombreux autre résulats.
Par exemple, on peut déduire du théorème de convergence monotone le résultat suivant:
Si (g_n) est une suite croissante de fonctions intégrables telle que $\sup\limits_n \int g_n < \infty$ alors g_n converge presque partout vers une fonction g qui appartient à L^1 et $\|g_n - g\|_{L^1} \to 0$. (Poser $f_n = g_n - g_0$).

2 Les "bosses"

Pour illustrer les propriétés des suites de fonctions de L^1 par des exemples et des contre-exemples on peut utiliser avantageusement des suites d'indicatrices.

1. "la bosse fuyante": $f_n = \chi_{[n,n+1[}$ la fonction indicatrice de $[n,n+1[$, qui converge presque partout vers 0 et qui garde une $\int f_n = 1$ pour tout n.

   (a) l'inégalité peut être stricte dans le lemme de Fatou.

   (b) L'hypothèse de domination dans le théorème de convergence dominée est fondamentale.

2. "la bosse montante" approximation de 0: $f_n = \sqrt{n}\chi_{[0,\frac{1}{n}[}$ qui tends vers 0 dans L^1 mais pas dans L^∞.

3. "la bosse montante" approximation de l'unité: $f_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n}[}$ qui converge presque partout vers 0, qui est de norme L^1 constante, qui ne converge pas dans L^1 et qui n'admet aucune sous-suite convergente dans L^1. (approximation de δ)

4. “la bosse tournante et évanescente”: $f_n = \chi_{[\frac{k}{2^p},\frac{k+1}{2^p}[}$ où $n = 2^P + k$, $0 \geq k < 2^p$.
   $\|f_n\|_{L^1} \to 0$ mais $f_n(x)$ ne converge pas vers 0 pour tout $x \in [0,1[$.

5. une suite de fonctions intégrables convergeant vers 0 uniformément sur $\mathbb{R}$ peut diverger dans L^1.

3 Utilisation de séries de fonctions intégrables

1. f intégrable n'implique pas que $f(x) \to 0$ en $+\infty$: $f = \sum n\chi_{[n,n+2^{-n}[}$.

2. *Théorème de convergence normale dans L^1*: [CFM], [R]
   Soit (u_n) une suite de fonction de L^1 telle que $\sum \|u_n\|_{L^1}$ converge alors $\sum u_n(x)$ converge pour presque tout x vers une fonction de L^1 et $\int \sum u_n = \sum \int u_n$.

3. Soit f intégrable alors $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ est bien définie pour presque tout x, est périodique et appartient à $L^1[= (]0,1[)$. Ainsi, si f est intégrable, $(f(x+n))_n$ tends vers 0 pour presque tout x bien que f peut ne pas tendre vers 0 en $+\infty$.

4. *Le théorème de la sous-suite convergente*: si $f_n \to f$ dans L^1 alors une sous suite de (f_n) converge vers f presque partout.

   (prendre $\varphi(n)$ telle que $u_n = f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n+1)}$ soit de norme L^1 plus petite que 2^{-n} et considérer $\sum u_n \dots$)

5. un exemple de fonction inégrable f telle $\overline{\{|f| = +\infty\}} = \mathbb{R}$.
   (Attention $|f(x)| = +\infty$ est à prendre au sens de la lim sup essentielle)
   $f = \sum_{q_n\in\mathbb{Q}} 2^{-n} g(x - q_n)$ où $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{]0,1[}(x)$

6. Si E_n est une suite d'ensembles mesurables telle que la somme des mesures des E_n converge, alors presque tout réel n'appartient qu'à un nombre fini de E_n. ($\sum \chi_{E_n}$)

4 Suppléments

1. Corrolaire du *théorème d'Egorov*: une suite de fonction intégrable convergeant simplement converge uniformément en dehors d'un ensemble de mesure strictement positive mais aussi petite que l'on veut.
   ($f = \lim f_n$, faire $\cap S(n_k,k)$ où $S(n,k) = \cap_{l>n}\{|f_l(x) - f(x)| < 1/k\}$)

2. Compact de L^1: famille bornée et équi-intégrable.
   exemple: f_n dérivable, $(f_n(0))_n$ bornée dans $\mathbb{R}$, $(f_n')_n$ bornée dans L^1.
   contre-exemples: $\sin(nx)$, approximation du Dirac.

Références:

- [*CFM*], Chambert-Loir & co, Tome 1.
- [R], Rudin, Analyse réelle et complexe.
- [ZQ], Zuily, Queffelec