$$S(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

un exemple de spectre singulier en 0.

1 Etude préliminaire de S

1. Montrez que S est bien définie, impaire et $S \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   On pourrait commencer par voir que $S(0) = 0$ et la série des dérivées converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2. La série définissant S converge t'elle normalement sur $\mathbb{R}$?
3. Vérifiez que $|S(x)| \leq |x|$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{d^k S}{dx^k}(x)\right| = 0$.
4. Montrez que S est strictement croissante et concave sur $[0, \Pi]$ et que $2.4 < S(\pi) < 2.5$.
5. Exprimez sous forme de série de fonctions la primitive de S nulle en 0.

2 $S(2x) = \sin(x) + S(x)$

1. Vérifiez que $S(2x) = \sin(x) + S(x)$. En déduire que $S(2^N\pi) = S(\pi) > 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{S(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x} = 0$.
3. Soit S_N, la somme partielle de rang N: $S_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Montrez que :
   $$S(x) = S_N(x) + S\left(\frac{x}{2^N}\right)$$
4. En déduire que $|S(x)| \leq N + |x|2^{-N}$ pour tout x et tout $N \in \mathbb{N}$. Ainsi, pout tout α tel que $0 < \alpha < 1$, vous pouvez montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x^\alpha} = 0$ (interprétation géométrique?) et même que $S(x) = \mathrm{O}(\ln(x))$ en $+\infty$.
5. En déduire que $\lim\limits_{N\to+\infty} S\left(2^{N+1}\pi + \pi\right) = 2S(\pi)$.
6. Plus généralement, en considérant $S\left(2^{N+1}\pi + y\right)$, montrez que : $\forall y$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists z > y$, $S(z) > S(y) + S(\pi) - \varepsilon$.
7. En déduire que $\sup\limits_{x>0} S(x) = +\infty$.
8. De même, montrez que $\inf\limits_{x>0} S(x) = -\infty$.
9. En déduire que S a une infinité dénombrable de racines isolées.
10. On appelle polynôme trigonométrique toute combinaison linéaire finie de $\sin(\alpha x)$ et $\cos(\alpha x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction est presque périodique si elle est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de polynômes trigonométriques.
    S est-elle périodique? presque-périodique?

$$F(x) := \sum_{x_n \leq x} p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n H(x - x_n)$$

un exemple de fonction monotone discontinue sur l'ensemble $D := \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ avec $p_n > 0, \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, et la fonctionde de Heaviside: $H(x) = 1$ si $x \geq 0$, $H(x) = 0$ si $x < 0$.

3 Etude de F

1. Vérifiez que F est bien définie, croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
2. On note $F(x+) = \lim_{h \to 0} F(x + |h|)$ et $F(x-) = \lim_{h \to 0} F(x - |h|)$.
   Montrez que F est discontinue sur D et que $F(x_k+) - F(x_k-) = p_k$.
3. Montrez que F est continue sur $\mathbb{R} - D$.
4. Montrez que F est continue à droite sur $\mathbb{R}$.
5. F peut-elle être strictement croissante sur $\mathbb{R}$?
6. En déduire que l'existence de fonction monotone discontinue sur un ensemble dense de $\mathbb{R}$

Références: Rudin, Principes d'Analyse Mathématiques.