TD : Onde de détente et onde de choc pour une loi de conservation scalaire.

Soient $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a := f'$ et $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. sauf mention contraire, on suppose que $a' > 0$ sur $\mathbb{R}$.

1. Préliminaires
   (a) À $t = 0$, on suppose que chaque point de la droite réelle d'abscisse $X(0, x_0) = x_0$, se déplace à la vitesse constante $a(u_0(x_0))$.
      i. Montrer qu'à l'instant t le point se trouve à l'abscisse
      $$X(t, x_0) = x_0 + ta(u_0(x_0)). \tag{1}$$
      ii. Représenter la trajectoire d'un tel point dans le demi-plan $\mathcal{P} : t > 0, x \in \mathbb{R}$. On prendra x en abscisse et t en ordonnée.
      iii. Soit $V(t, x)$ la vitesse du point d'abscisse x et d'ordonnée t. Montrez que $V(t, X(t, x_0)) = a(u_0(x_0))$.
      iv. Montrez que $u(t, x)$ est bien définie par la relation $a(u(t, x)) = V(t, x)$. En déduire que $a(u(t, X(t, x_0))) = a(u_0(x_0))$ et :
      $$u(t, X(t, x_0)) = u_0(x_0). \tag{2}$$
      v. Si $u_0 \in C^1$ montrez que u est solution sur $\mathcal{P}$ de
      $$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \tag{3}$$
      $$u(0, x) = u_0(x), \qquad x > 0. \tag{4}$$
   (b) Si $u_0' > 0$ et $u_0 \in C^1$ montrez que la solution précédente est définie sur tout $\mathcal{P}$.
   (c) Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions $C^\infty(\overline{\mathcal{P}})$ à support compact. En multipliant par φ et en intégrant par parties sur $\mathcal{P}$ montrez que :
   $$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) dx = 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{5}$$
   Si u vérifie (5) on dit que u est une solution faible de (3), (4).
   (d) Si $f(u) = cu$, et $u_0 \in L^\infty$ montrez que $u_0(x - ct)$ est une solution faible de (3), (4).
   On pourra commencer par le cas $c = 0$.
2. Onde de détente : $u_- < u_+$
   $$u_0(x) = \begin{cases} u_-, & x \leq 0 \\ u_+, & x > 0 \end{cases}, \tag{6}$$
   On cherche une solution faible u de (5), (6).

(a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $(t, x) \mapsto u(\lambda t, \lambda x)$ est encore une solution faible du même problème.

(b) On cherche une solution faible autosimilaire : $u(\lambda t, \lambda x) \equiv u(t, x)$, $\forall \lambda > 0$. Trouver $U \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, C^1 par morceaux, telle que sur $\mathcal{P}$:

$$u(t, x) \quad = \quad U\left(\frac{x}{t}\right). \tag{7}$$

Indication : on utilisera d'abord formellement (3), (4). On obtiendra :

$$\begin{aligned} \xi_\pm &:= a(u_\pm) \\ a(U(\xi)) &= \xi \qquad \text{pour } \xi_- < \xi < \xi_+, \\ U(\xi) &= u_- \qquad \text{pour } \xi < \xi_-, \\ U(\xi) &= u_+ \qquad \text{pour } \xi > \xi_+. \end{aligned}$$

On remarquera que $\xi_- < \xi_+$, puis, on montrera finalement que u ainsi définie est effectivement une solution faible.

(c) Traiter explictement le cas $a(v) = v$, $v \in \mathbb{R}$ et $u_0(x) = H(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$.

3. Onde de choc : $u_- > u_+$

   (a) Expliquer pourquoi la construction précédente ne nous fournit pas de solution.

   (b) En revanche, expliquez pourquoi on peut espérer avoir une solution autosimilaire.

   (c) On cherche une solution faible sous la forme

$$u(t, x) \quad = \quad \begin{cases} u_-, & x < st \\ u_+, & x > st \end{cases}, \tag{8}$$

   Montrez que

$$s = \frac{[f(u)]}{[u]}, \quad \text{où} \quad [u] := u_+ - u_-, \quad [f(u)] := f(u_+) - f(u_-). \tag{9}$$

   (d) Traiter explictement le cas $a(v) = v$, $v \in \mathbb{R}$ et $u_0(x) = -H(x)$ et donner une interprétation cinématique de la solution trouvée.

   (e) Peut-on traiter le cas $u_- < u_+$ de cette manière ?

4. Recommencer la feuille dans le cas où f est strictement concave (en changeant ce qu'il faut changer).