

TP **Scilab**,

Méthode approchée de résolution d'équations différentielles à un pas

mots clef **Scilab** : *deff, function, ode, plot, plot2d, ...*

Soit $F \in C^\infty([T_0, T_1] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, $X_0 \in \mathbb{R}^d$, on cherche une solution approchée du problème de Cauchy suivant :

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X(t)), \quad t \in [T_0, T_1], \quad X(T_0) = X_0 \quad (1)$$

On pose $h := \frac{T_1 - T_0}{N}$; $t_n := T_0 + nh$; $n = 0, \dots, N$ et on approche $X(t_n)$ par X_n défini à l'aide d'une fonction Φ dépendant du choix de la méthode :

$$X_{n+1} = X_n + h\Phi(t_n, X_n, h), \quad n = 0, \dots, N, \quad X_{n=0} = X_0 \quad (2)$$

1 Exemples

Vous testerez les exemples suivants :

1. $F_1(x) := \lambda x$,
 2. $F_2(t, x) := \pm x^2 + \alpha t$,
 3. équation logistique : $F_3(x) := x(1 - x) - p - cx$,
 4. système proie-prédateur Lotka-Volterra : $F_4(x_1, x_2) := (x_1(1 - x_2), -x_2(1 - x_1))$,
 5. modèle d'épidémie : $F_5(x_1, x_2, x_3) := (-x_1x_2, -x_2 + x_1x_2, x_2)$,
 6. l'équation du pendule : $x'' + \lambda x' + \sin(x) = 0$,
 7. équation de van der Pol : $x'' = -x + (1 - x^2)x'$,
 8. Rajoutez des exemples vus en Analyse ou en Analyse numérique ayant un rapport avec les thèmes de cette année.
- ...

2 La méthode d'Euler : $\Phi(t, X, h) = F(t, X)$

1. Programmez et visualisez cette méthode sur les exemples précédents.
2. Comparez avec les solutions exactes (quand c'est possible!) et les solutions données par votre logiciel préféré.
3. Comparer les résultats numériques à vos connaissances théoriques : théorème de Cauchy, explosion, points attractifs, solutions périodiques, cycle limite, ...

3 Exemples de méthodes d'ordre élevé

1. En modifiant légèrement votre programme "Euler", obtenez une méthode d'ordre 2.
 - (a) "point milieu" : $\Phi(t, X, h) = F(t + h/2, X + h/2F(t, X))$,
 - (b) "trapèzes" : $\Phi(t, X, h) = [F(t, X) + F(t + h, X + hF(t, X))]/2$,Comparez les résultats du nouveau programme avec ceux de votre programme "Euler".
2. Pour les méthodes d'ordre élevé (ordre ≥ 4 : RK4, méthodes multipas, ...), utilisez les fonctions déjà programmées dans votre logiciel.

4 Le θ schéma

On se propose de faire une étude d'une famille de schéma paramétrée par θ .

$$X_{n+1} = X_n + h[(1 - \theta)F(t_n, X_n) + \theta F(t_{n+1}, X_{n+1})]$$

Ce schéma est implicite pour $\theta \neq 0$ et d'ordre 2 pour $\theta = \frac{1}{2}$. Ces schémas sont les plus simples pour approcher numériquement des problèmes raides (et le démontrer mathématiquement).

1. Tester ce schéma, en particulier sur F_1 avec : $\theta = 0$ ou 1 , $[T_0, T_1] = [0, 1]$, $X_0 = 1$,
2. $\lambda = -10, -20$, $h = 10^{-1}$. Que remarquez vous ?

Références : Equations différentielles ordinaires, Arnold ; Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Chambert-Loir & Fermigier ; Analyse numérique des équations différentielles, Crouzeix-Mignot ; Analyse numérique et équations différentielles, Demailly ; analyse numérique : cours et exercices pour la licence, Schatzman ; ...

5 Méthode d'Euler avec Scilab

– sous le prompt :

```
->t=0 :0.1 :1
->x=t
->x(1)=1;
->deff('[y]=fct(x)', 'y=-x')
->x(1)=1;for k=1 :10, x(k+1)=x(k)+0.1*fct(x(k)),end
->plot(t,x)
```

déclaration de la fonction Euler sous le prompt :

```
->deff('[x]=Euler(fct,t0,x0,t1,h)',
'N=(t1-t0)/h;x(1)=x0;for k=1 :N, x(k+1)=x(k)+h*fct(x(k)),end')
->plot(Euler(fct,0,1,1,10))
```

– déclaration de la fonction Euler, dans un fichier texte :

```
function [t,x]=euler(fct,t0,x0,t1,N)
// Methode d'Euler avec en graphe du résultat en dimension d = 1 ou 2
// la condition initiale est un vecteur ligne
// exemple : ->[t,x]=euler(f4,0,[1,2],25,3)
// en sortie : - t est la subdivision de l'intervalle de temps
// - x(n,i)= Xi(T0+n h)
h=(t1-t0)/N;
t=t0 :h :t1;
aux=size(x0);
d=aux(2);
x(1,1 :1 :d)=x0;
for k=1 :N,
x(k+1,1 :1 :d)=x(k,1 :1 :d)+h*fct(t(k),x(k,1 :1 :d)),
end
if d==1 then xbasec();plot(t,x); end
if d==2 then xbasec(); plot(x(1 :1 :N+1,1),x(1 :1 :N+1,2)); end
Appel de la fonction euler sous Scilab :
->getf('euler.sci')
->euler(fct,0,1,1,10);
```

6 Méthode d'Euler avec Maple

- *Méthode d'Euler avec une fonction en paramètre :*
- *Méthode d'Euler avec une expression en paramètre :*
- *Exemples :*