Interpolation d'Hermite cubique & Splines cubiques

On se donne $f \in C^4([a,b])$. $\mathbb{P}_3$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3.

1 Une interpolation cubique d'Hermite

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme p de $\mathbb{P}_3$ tel que

$$\begin{array}{ll} p(a) = f(a), & p'(a) = f'a), \\ p(b) = f(b), & p'(b) = f'(b). \end{array}$$

2. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi = \xi_x \in]a,b[-\{x\}$ tel que:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-a)^2(x-b)^2.$$

3. On pose $h = b - a$, $x = a + th$. Montrer que :

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & f(a)l_a(x) + f'(a)h_a(x) + f(b)l_b(x) + f'(b)h_b(x), \\ l_a(x) & = & L_0(t) = (1+2t) \times (t-1)^2, \\ l_b(x) & = & L_1(t) = (3-2t) \times t^2, \\ h_a(x) & = & hH_0(t) = h \times t \times (t-1)^2, \\ h_b(x) & = & hH_1(t) = h \times t^2 \times (t-1). \end{array}$$

4. Calculer et reprsésenter graphiquement $x \to \sin(x)$ et son interpolée d'Hermite sur: $[a,b] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et, $[a,b] = [0,\pi]$, à l'aide d'un programme.

2 Un calcul de la spline cubique

Soit $f \in C^4([a,b],\mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}$, $x_i = a+ih$, $0 \le i \le N+1$, $h = \dfrac{(b-a)}{N+1}$, On va approcher f par une fonction spline $s = s_h \in C^2$, cubique par morceaux, qui interpole f aux points x_i:

- $s \in \mathbb{P}_3^{pm} = \{v : [0,1] \to \mathbb{R}, v_{|[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3, i = 0,\cdots,N\}$,
- $s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0,\cdots,N+1$,
- $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$.
- $s'(x_i) = p_i$, $i = 1,\cdots,N$;

où les p_i sont solutions du système linéaire suivant pour que $s \in C^2([a,b],\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} = \frac{3}{h} \begin{pmatrix} f(x_2) - f(a) \\ f(x_3) - f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) \\ \vdots \\ f(b) - f(x_{N-1}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f'(a) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ f'(b) \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre le système donnant s' aux points d'interpolation dans $]a,b[$,
   i.e. calculer numériquement les p_i.
   On pourra utiliser la commande *linsolve(A,B)* qui résoud le système $AX+B=0$.

2. En posant $p_0 = f'(a)$, $p_{N+1} = f'(b)$, on a sur chaque $[x_i,x_{i+1}]$, $s \in \mathbb{P}_3$ et:

   $$\begin{aligned} s(x_i) = f(x_i), &\quad s'(x_i) = p_i, \\ s(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), &\quad s'(x_{i+1}) = p_{i+1}. \end{aligned}$$

   Faire un programme qui évalue $s(x)$ pour $x \in [a,b]$ en utilsant l'interpolation d'Hermite par morceau.

3. Représenter graphiquement $f = \sin$ et s sur $[0,l\pi]$, pour $l = \frac{1}{2},1,2,6$.

Remarque 1

- *En pratique on utilise les B splines cubiques pour calculer la fonction spline.*
- *La condition $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$ peut être remplacée par la condition "naturelle": $s"(a) = 0$, $s"(b) = 0$.*
- *Dans le cas où f est périodique et l'interpolation est faite sur sa période, on n'a pas besoin de se donner p_0, p_{N+1}.*