TP choc visqueux pour l'équation de Burgers.

Profil de choc visqueux pour l'équation de Burgers : $\nu > 0, \nu \to 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t > 0, x \in I\!R \tag{1}$$

$$u(0,x) = H(-x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{array} \right. , \tag{2}$$

avec $u \in C^2(]0,+\infty[_t \times I\!R_x, I\!R) \cap C^0([0,+\infty[_t \times I\!R_x - \{(0,0)\}, I\!R)$.

Pour la suite des démonstrations mathématiques, on pourra lisser H en convolant avec $\frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ où ρ est un fonction C^∞, positive, à support compact, d'intégrale unité. Pour le schéma numérique, on gardera la fonction H, car pour $\varepsilon << \Delta x$ cela ne changera rien numériquement.

1. Pour commencer, on admettra que ce problème (1),(2) admet une unique solution bornée. Cette solution peut s'obtenir avec une méthode de point fixe et le noyau de la chaleur.
   Soit $\gamma \geq 0$,γ est une constante pour cette question.

$$\frac{\partial w_\nu}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial x}(w_\nu) = \nu \frac{\partial^2 w_\nu}{\partial x^2}, \qquad t > 0, x \in I\!R \tag{3}$$

$$w_\nu(0,x) = H(-x) \qquad . \tag{4}$$

   (a) Exprimer la solution à l'aide de la tranformée de Fourier en espace. (on pourra d'abord faire le changement de variable $y = x - \gamma t$).
   (b) Puis, montrer que, pour tout $t > 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} w_\nu(t,x) = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} w_\nu(t,x) = 0$.
   (c) Quel est le comportement des solutions de l'équation suivante avec $\nu > 0, \nu \to 0$?

2. Recherche d'une solution stationnaire : $u(t,x) = U(x - ct)$ où c est une vitesse de propagation à détérminer et U vérifie les conditions aux limites :

$$\lim_{y \to -\infty} U(y) = 1, \quad \lim_{y \to +\infty} U(y) = 0. \tag{5}$$

   (a) Vérifiez que , nécessairement, U est une solution globale de l'équation différentielle suivante où $c, d \in I\!R$:

$$\nu \frac{dU}{dy} = \frac{U^2}{2} - cU + d. \tag{6}$$

   (b) Si $P(V)$ est un polynôme à coefficient réel du second degré tel que $\lim\limits_{V \to +\infty} P(V) = +\infty$. Montrez que :
      i. Si P n'admet pas de racines réelles alors les solutions maximales de l'équation différentielle $\frac{dV}{dy} = P(V)$ ne sont jamais globales et admettent toujours deux asymptotes verticales.

ii. Si P admet une seule racine réelle alors les solutions maximales de l'équation différentielle $\dfrac{dV}{dy} = P(V)$ ne sont jamais globales et admettent toujours une asymptote verticale.

iii. Si P admet deux racines réelles $v_- > v_+$ alors les seules solutions globales V de l'équation différentielle $\dfrac{dV}{dy} = P(V)$ sont les transaltées de la solution globale W strictement décroissante telle que $\dfrac{dW}{dy} = P(W), W(0) = \dfrac{v_- + v_+}{2}$, de plus $\lim\limits_{y \to \pm\infty} V(y) = v_\pm$.

(c) En déduire que $d = 0$, $2c = 1$ et calculer explicitement $U = U_\nu$ ainsi que $\lim\limits_{\nu \to 0+} U_\nu$.

4. Principe du maximum : Soit $T > 0$, $u_0 \in C^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}_x, \mathbb{R})$ donné, $\gamma = \gamma(t,x) \in C^1 \cap L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}_x, \mathbb{R})$, $u \in C^2 \cap L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}_x, \mathbb{R})$ une solution régulière de (3),(4). Notez que γ est une fonction pour cette question.

(a) Soit $\delta > 0$ assez petit, en étudiant $v(t,x) = u(t,x) - \delta t - \delta^4 x^2$, montrez que v puis u vérifie

$$u(t,x) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} u_0(x). \tag{7}$$

Indications : Soit $T > 0$, $S := [0,T] \times \mathbb{R}$, $M := \sup\limits_S |u|$, $C := \sup\limits_S |\gamma|$, et, le compact $K := [0,T] \times \{x \in \mathbb{R},\ \delta^4 x^2 \leq 2M\}$. Comme v est continue sur S, $v(0,0) \geq -M$ et $v < -M$ sur $S - K$, v admet son maximum global sur S en $Y := (\tau, \xi) \in K$.
On peut voir que $\tau = 0$. Sinon $\tau > 0$ et $\frac{\partial v}{\partial t}(Y) \geq 0$, $\frac{\partial v}{\partial x}(Y) = 0$, $-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(Y) \geq 0$, et donc $Lv(Y) \geq 0$ où $L := \dfrac{\partial}{\partial t}() + \gamma(t,x)\dfrac{\partial}{\partial x} - \nu \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$.
D'autre part $Lv(Y) < 0$ si δ est suffisamment petit. En effet $Lv = Lu - \delta Lt - \delta^4 Lx^2 = 0 - \delta - \gamma\delta^2 x \delta^2 - 2\delta^4$, donc $Lv(Y) \leq -\delta + C\sqrt{2M}\delta^2 - 2\delta^4 < 0$.
De $0 \geq Lv(Y) < 0$, on en déduit une contradiction, donc $\tau = 0$ et $\sup_S v \leq \sup_{\mathbb{R}} v(0,.)$.
Puis, on conclut de même pour u en faisant tendre δ vers 0.

(b) De même, minorer $u(t,x)$ par l'inf u_0 (prendre $\delta < 0$).

(c) En déduire que toute solution de (1) vérifie le principe du maximum.

(d) En déduire que le problème (1),(2) n'admet qu'une solution.

5. Exemples d'applications numériques :

(a) Appliquer un schéma numérique (décentré) au problème (1),(2) avec $\nu = 0$ et comparer le résultat numérique à la solution $U_\nu(x - t/2)$ avec $1 >> \nu > 0$.

(b) Appliquer le schéma de Lax avec $\nu = 0$ où u_j^n est censé approcher $u(n\Delta t, j\Delta x)$:

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j-1}^n + u_{j+1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\frac{\left(u_{j+1}^n\right)^2}{2} - \frac{\left(u_{j-1}^n\right)^2}{2}\right).$$

(c) Pour $1 >> \nu > 0$, au problème (1),(2), on pourra adapter un schéma implicite pour léquation de la chaleur pour $x \in [-1,1]$, avec la condition de Dirichlet $u = 1$ en $x = -1$ et $u = 0$ en $x = +1$.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2\Delta x}\left(\frac{\left(u_{j+1}^n\right)^2}{2} - \frac{\left(u_{j-1}^n\right)^2}{2}\right) = \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2}.$$

Puis, comparer la solution obtenue à la solution autosimilaire $U_\nu(x - t/2)$.