TP Onde de détente

TP + Cours : Onde de détente pour une loi de conservation scalaire.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad t > 0, x \in I\!R \tag{1}$$

$$u(0,x) = H(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \tag{2}$$

avec $\inf f'' > 0$, par exemple, lorsque $f(u) = \dfrac{u^2}{2}$ on obtient un modèle simplifié de la dynamique des gaz : l'équation de Burgers sans viscosité, où $u(t,x)$ représente la vitesse d'un gaz dans un tube rectiligne, à l'instant t et au point x.

On cherchera une solution continue et C^1 par morceaux sauf au point $t = 0$ et $x = 0$,de la forme $u(t,x) = U\left(\dfrac{x}{t}\right)$.

On comparera la solution autosimilaire à celle obtenue à l'aide d'un schéma décentré.

Plus précisément, on pourra suivre le déroulement suivant :

1. Vérifiez que la condition $\inf\limits_{u \in \boldsymbol{R}} f''(u) > 0$ nous assure que f' est un difféomorphisme de $I\!R$ sur $]A, +\infty[$, $A \in [-\infty, +\infty[$.
2. Montrez que l'on peut trouver $\xi_- < \xi_+$ tels que $U(\xi)$ vérifie :

$$\frac{dU}{d\xi}\left(f'(U(\xi)) - \xi\right) = 0, \quad \text{pour } \xi_- < \xi < \xi_+,$$

$$\frac{dU}{d\xi} = 0, \quad \text{pour } \xi \notin [\xi_-, \xi_+],$$

avec $U(\xi)$ continue et C^1 par morceaux sur $I\!R$, et $u(t,x) = U\left(\dfrac{x}{t}\right)$ est solution de (1),(2).

On pourra montrer que $\dfrac{dU}{d\xi} \neq 0$, pour $\xi \in]\xi_-, \xi_+[$.

(on discutera en TP des cas où $x = \xi_\pm t$).

3. Dans le cas où $f(u) = \dfrac{u^2}{2}$, expliciter précisément la solution trouvée. Pourquoi cette solution s'appelle une onde de détente ? (pompe à vélo)
4. Pour résoudre numériquement (1),(2) on va d'abord étudier une équation de transport linéaire avec une vitesse positive :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0, x \in I\!R \tag{3}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{4}$$

(a) Si $c \in C^1 \cap L^\infty([0,+\infty[\times I\!R, I\!R)$, $u_0 \in C^1(I\!R, I\!R)$, montrez que l'on peut résoudre globalement (3),(4) sur $I\!R_t^+ \times I\!R_x$, car u est constante sur les caractéristiques$(t, X(t,x_0))_{t\geq 0}$ définies comme les solutions de

$$\frac{dX(t,x_0)}{dt} = c(t, X(t,x_0)), \quad t \geq 0, \quad X(0,x_0) = x_0.$$

(b) Si $c \geq 0$ sur $I\!R_t^+ \times I\!R_x$, on va faire du Euler explicite en temps et une approximation décentrée en espace qui tient compte du signe de la vitesse de transport. C'est à dire que l'on approche $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)$ par $\dfrac{u(t+\Delta t, x) - u(t,x)}{\Delta t}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x)$ par $\dfrac{u(t,x) - u(t, x-\Delta x)}{\Delta x}$.
En posant $x_k = k\Delta x, t_j = j\Delta t, u_k^j \simeq u(t_j, x_k), r_k^j = c(t_j, x_k)\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ et en négligeant les restes, montrez que l'on obtient le schéma numérique suivant.

$$u_k^{j+1} = (1 - r_k^j)u_k^j + r_k^j u_{k-1}^j, \quad u_k^0 = u_0(x_k), \quad k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

(c) Sous la condition (CFL) : $\sup\limits_{j,k} c(t_j, x_k)\dfrac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ et si $c \geq 0$, montrez que ce schéma converge.
On pourra étudier la consistance et la stabilité du schéma en norme $\|.\|_\infty$ sur $[0,T] \times I\!R$.
On regardera aussi les cas particuliers $c \equiv 0$ et, $c \equiv 1 = \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$.

5. En posant $c(t,x) = u(t,x)$, appliquez le schéma numérique (5) pour retrouver numériquement l'onde de détente trouvé précédement comme solution de (1),(2), avec $f(u) = \dfrac{u^2}{2}$.