# TP Interpolations

## 1 Interpolation de Lagrange

1. Mettez en oeuvre un programme de calculs de polyôme de Lagrange à l'aide des différences divisées. Soient $x_0, \cdots, x_n$ les points d'interpolations on a :

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \cdots, x_k]\Pi_{j=0}^{k-1}(x - x_j), \\ f[x_0] &= f(x_0), \\ f[x_0, \cdots, x_k] &= \frac{f[x_1, \cdots, x_k] - f[x_0, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}. \end{aligned}$$

   On stockera $(f(x_0), \cdots, f(x_n))$ dans un vecteur $F$. Puis on calculera, à l'aide de la formule de récurrence ci dessus, dans le même vecteur $F$, $(f(x_0), f[x_0, x_1], f(x_1, x_2], \cdots, f[x_{n-1}, x_n])$, et ainsi de suite, pour obtenir à la fin $F_{k+1} = f[x_0, \cdots, x_k]$.
   Le polynôme s'évaluera avec la méthode de Horner : $P_n = F_{n+1}$, $P_{k-1} = F_k + P_k * (x - x_k)$, $P_0 = p_n(x)$.
2. Interpolez la fonction $f :=\sin$ sur $[-1, 1]$ aux points $\frac{k}{n}$, $|k| \leq n$. On tracera le graphe de $f$ et de son interpolée. Puis on prendra $n$ de plus en plus grand.
3. <u>Phénomène de Runge</u> : Même question avec $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ sur $[-1, 1]$ aux points $\frac{k}{n}$, $|k| \leq n$.
4. Interpolez $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ aux points de Tchebycheff : $x_k = \cos\left(\dfrac{2k+1}{2n}\pi\right)$, $0 \leq k < n$. Que remarquez vous ?

## 2 Polynômes Orthogonaux

1. Calculez les polynômes de Tchebycheff : $t_0(x) = 1, t_1(x) = x, t_{k+1}(x) = 2xt_k(x) - t_{k-1}(x)$.
2. Tracez quelques polynômes de Tchebycheff.
3. Remarquez le caractére équioscillant de $2^{-n}t_{n+1}(x) - x^{n+1}$. Qu'en concluez vous ? ( Demailly, Exemple p. 43)
4. Calculez la meilleure approximation de $f$ par un polynôme de degré au plus $n$ pour la norme $\|g\| := \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{g^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx}$. Donnez des représentations graphiques, par exemple pour $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Références :
Crouzeix & Mignot :Analyse numérique des équations différentielles.
Demailly : Analyse numérique et équations différentielles.
Schatzman : Analyse numérique