Calculs de valeurs approchées d'une intégrale

Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N} - \{0\}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + ih$ pour $i = 0, 1, \ldots, N$ et $\mathbb{P}_d$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à d. f et φ seront toujours supposées de classe C^∞.

1 Méthode de quadrature composée (MQC)

On choisit une formule de quadrature élémentaire (FQE) sur l'intervalle $[0,1]$ à $l+1$ points associées aux points $\tau_j \in [0,1]$, $j = 0, 1, \ldots, l$ et aux poids ω_j tel que :

$$\int_0^1 \varphi(t)dt \simeq \sum_{j=0}^{l} \omega_j \varphi(\tau_j) \quad , \quad \sum_{j=0}^{l} \omega_j = 1 \tag{1}$$

La FQE est dite d'ordre d si $\forall \varphi \in \mathbb{P}_d$, l'erreur élémentaire $e(\varphi) = \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)dt - \sum_{j=0}^{l} \omega_j \varphi(\tau_j) = 0$.

Par changement de variable affine (de $[0,1]$ sur $[\alpha,\beta]$ ...), on en déduit les formules formelles :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \simeq (\beta-\alpha) \sum_{j=0}^{l} \omega_j f(\alpha + (\beta-\alpha)\tau_j) \tag{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq Q_N(f) = h \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{l} \omega_j f(x_i + h\tau_j) \tag{3}$$

On notera $e_i(f) = \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - h \sum_{j=0}^{l} \omega_j f(x_i + h\tau_j)$ et $E_N(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx - Q_N(f)$.

1. **TP** : Mettre en oeuvre les méthodes suivantes de Newton-Cotes :

1.1 Méthode des rectangles : $l = 0$, $\tau_0 = 0$

$h \displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)$. On a : $E_N(f) = O(h) = \dfrac{1}{2} h f'(\xi)(b-a)$, $\xi \in [a,b]$.

1.2 Méthode des trapèzes :$l = 1$, $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 1$

$Q_N(f) = h \displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$. On a : $E_N(f) = O(h^2) = \dfrac{-1}{12} h^2 f''(\xi)(b-a)$, $\xi \in [a,b]$.

1.3 Méthode de Simpson : $l = 2,\ \tau_0 = 0,\ \tau_1 = 0,5,\ \tau_2 = 1$

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{N-1}\left(f(x_i) + 4f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + f(x_{i+1})\right) = O(h^4) = \frac{-1}{2880}h^4 f^{(4)}(\xi)(b-a).$$

1.4 Méthode du point milieu

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{24}h^2 f''(\xi)(b-a),\ \xi \in [a,b].$$

2 Méthode de Monte-Carlo

Soit (X_i) une suite de variables indépendantes suivant la loi uniforme sur $]0,1[$. La touche random ou aléa de votre calculatrice simule de telles suites.

Montrez que $P\left(\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to+\infty} \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(a+(b-a)X_i)\right) = 1.$

Grâce à cette méthode on peut intégrer des fonctions peu régulières. De plus cette méthode est peu coûteuse pour approcher des intégrales multiples quand la dimension est grande.

3 Exemples

Donner les erreurs théoriques et les erreurs constatées à la machine des exemples suivants :

1. Utiliser et comparer toutes les méthodes pour calculer $\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$ avec $h < 10^{-2}$.
2. Utiliser et comparer ces méthodes pour calculer $\int_0^1 4\sqrt{1-x^2}$ avec $h < 10^{-2}$.
3. Utiliser et comparer ces méthodes pour calculer $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ avec $h < 10^{-2}$, et $\alpha \in]0,1[$.
4. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)dx$ à 10^{-4} prés.
5. Comparer la méthode de Monte-Carlo et la méthode des rectangles pour évaluer des intégrales multiples, par exemple : $I_d = \int_{[0,1]^d}\left(\sum_{k=1}^{d} x_k^2\right) dx_1 \cdots dx_d$, $d = 1,2,3$.

Références : Baranger ; Crouzeix-Mignot ; J.P. Demailly ; Korner ; Toulouse ;