http//math.unice.fr/~junca

Exemples de résolution approchées d'équations aux dérivées partielles de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad t > 0, \tag{1}$$
$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in I\!R \tag{2}$$

1. Résoudre mathématiquement le problème de Cauchy (1), (2).
2. Si u_0 est à support compact contenu dans $[-a, a]$. Expliquez pourqoui on peut se ramener à un problème dans un domaine borné avec conditions de Dirichlet au bord. Par exemple, on prendra le rectangle $[0, T] \times [-A, A]$ avec A assez grand: $A = a + cT$.
3. Dans le cas périodique, de période a. Montrer que l'on peut résoudre mathématiquement le problème de Cauchy (1), (2) dans le rectangle $[0, T] \times [-A, A]$ avec $A = a/2$ et conditions de Dirichlet périodique au bord: $u(t, A) = u(t, 0)$.
4. On discrétise (1),(2), avec $\triangle t := \dfrac{T}{N}$ le pas de temps, $\triangle x := \dfrac{2A}{J+1}$ le pas d'espace, $r = \dfrac{\triangle t}{\triangle x}$, et $u_j^n \simeq u(n\triangle t, -A + j\triangle x)$, $n = 0, \cdots, N$, $j = 0, \cdots, J+1$.

   Traduisez les conditions aux bords que l'on doit prendre pour u_0^n et u_{J+1}^n, d'abord dans le cas à support compact, puis, dans le cas périodique.
5. Tester le schéma "naturel", mais instable, suivant, avec $c = 1$ et une donnée initiale à support compact:
$$u_j^{n+1} = u_j^n - cr/2 \times \left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)$$
6. Tester le schéma décentré suivant avec $c = 1$, en étudiant les cas où $r > 1, r = 1, 0 < r < 1$:
$$u_j^{n+1} = u_j^n - cr\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right)$$
7. Si $c = -1$, montrer qu'il faut décentrer (la dérivée en espace) de l'autre côté.
8. Tester le schéma de Lax pour $|c|\triangle t/\triangle x \leq 1$: $u_j^{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) - c\dfrac{\triangle t}{2\triangle x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)$

9.* Traiter le cas non linéaire $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$, avec $f(u) = u^2/2$.

Références :

- Dautray-Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les Sciences et les Techniques,
- Euvrard, Résolution numérique des équations aux dérivées partielles,