Exemples d'approximations de $F(X) = 0$

1 Le nombre d'or φ

Le nombre d'or φ est la plus grande solution (positive) de l'équation:

$$x^2 = x + 1. \tag{1}$$

Metter en oeuvre et tester les méthodes suivantes en écrivant l'équation (1) sous la forme $f(x) = 0$ ou $g(x) = x$:

1. La dichotomie: On localisera φ dans $[1, 2]$.
2. Une méthode de point fixe: on vérifiera que φ est un point fixe de:
   (a) $g_1(x) = x^2 - 1$,
   (b) $g_2(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$,
   (c) $g_3(x) = \sqrt{x + 1}$.

   On testera la convergence de la suite $x_{n+1} = g_k(x_n)$, $k = 1, 2, 3$, $x_0 = 1$.
3. La méthode de Newton: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
4. La méthode de la sécante: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{p_n}$, $\quad p_n = \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$.

2 Un exemple en dimension 2

On cherche la racine de $F(X) = \begin{pmatrix} 2x - \cos(x + y) \\ 2y - \sin(x - y) \end{pmatrix}$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. À l'aide du théorème du point fixe des applications contractantes, montrer que F admet une unique racine, point fixe d'une fonction G.
2. Metter en oeuvre la méthode du point fixe: $X_{n+1} = G(X_n)$.
3. Metter en oeuvre la méthode de Newton: $X_{n+1} = X_n - [DF(X_n)]^{-1} F(X_n)$.

Références : Ciarlet; J.P. Demailly; Rouvière : PGCD.