$\mathbb{R}$: sous-groupes additifs, $\limsup$

1 Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$, $G^+ = G \cap]0,+\infty[\neq \emptyset$, $m = \inf G^+$.

1. Donner, si possible, des exemples de groupes tel que $m = 1$,puis $m = 0$.
2. Montrer que si $m > 0$ alors $G = m\mathbb{Z}$. G est donc discret.
3. Montrer que si $m = 0$ alors G est dense dans $\mathbb{R}$: $\overline{G} = \mathbb{R}$.
4. En déduire que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est discret si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$.
5. Obtenir toutes les valeurs d'adhérences de $(\sin n)_n$, $(\cos n)_n$, $(\tan n)_n$. (Utiliser $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$.)
6. <u>Période</u>: Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, P est une période de f, si pour tout x, $f(x+P) = f(x)$.
   (a) Montrer que que l'ensemble des périodes de f, noté G dans cette partie, est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
   Désormais on suppose que f est **périodique**, i.e. G n'est pas réduit à un seul élément.
   (b) Si $m = 0$, montrer que f est nécessairement constante et $G = \mathbb{R}$.
   (c) Sinon, $m > 0$, m s'appelle **la** période de f, pourquoi?
7. Soit $f(x) = \sin(x) + \cos(\sqrt{2}x)$, montrer que f n'est pas périodique sur $\mathbb{R}$ puis calculer $\sup f$.

2 $\limsup$

Soient $(u_n)_n$ une suite réelle et $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ la droite numérique achevée.

$\overline{\mathbb{R}}$ posséde la propriété fondamentale: toute suite monotone de $\overline{\mathbb{R}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$, i.e. tout partie E non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet un plus petit majorant $\sup E \in \overline{\mathbb{R}}$.

On pose $\limsup u_n = \inf\limits_n \sup\limits_{k \geq n} u_k$ et $\liminf u_n = \sup\limits_n \inf\limits_{k \geq n} u_k$.

1. Montrer que $v_n = \sup\limits_{k \geq n} u_k$ et $t_n = \inf\limits_{k \geq n} u_k$ sont monotones et que $t_n \leq u_n \leq v_n$.
2. En déduire que $\limsup u_n$, $\liminf u_n$ sont bien définies dans $\overline{\mathbb{R}}$.
3. Calculer la $\limsup$ et la $\liminf$ des suites de terme général:
   $1/n$, n, $(-1)^n$, $(-1)^n + 1/n$, $1 + (1-(-1)^n)n$, $\sin n$.
4. Vérifier certaines des propriétés utiles suivantes:
   (a) $(u_n)_n$ est majorée dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\limsup u_n < +\infty$.
   (b) Si $\limsup u_n \in \mathbb{R}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, $u_n < \limsup_n + \varepsilon$ à partir d'un certain rang.
   (c) $\limsup u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(u_n)_n$, i.e.:
   $\limsup u_n = \sup Ad[u_n] = \max Ad[u_n]$, où $Ad[u_n] = \cap_n \overline{\cup_{k>n}\{u_k\}}$.

(d) $\{\liminf u_n, \limsup u_n\} \subset Ad[u_n] \subset [\liminf u_n, \limsup u_n]$.

(e) Si $(u_n)_n$ converges alors $\liminf u_n \leq \lim u_n \leq \limsup u_n$.
Réciproquement, si $\liminf u_n = \limsup u_n$ alors $(u_n)_n$ converges.

(f) $\lim u_n = 0$ si et seulement si $\limsup |u_n| = 0$.

(g) $\limsup(u_n + v_n) \leq \limsup u_n + \limsup v_n$,
si de plus $(u_n)_n$ converges alors $\limsup(u_n + v_n) = \lim u_n + \limsup v_n$.

(h) $\limsup \lambda u_n = \begin{cases} \lambda \limsup u_n & \text{si } \lambda < 0, \\ \lambda \liminf u_n & \text{sinon.} \end{cases}$

(i) Si $(u_n)_n$ est bornée et si $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est croissante alors $\limsup f(u_n) = f(\limsup u_n)$.

5. Montrer que si $\limsup |u_n|^{1/n} < r$, alors $(u_n)_n = O(r^n)$.
Plus précisément, montrer que :
il existe $r < 1$ tel que $(u_n)_n = O(r^n)$ si et seulement si $\limsup |u_n|^{1/n} < 1$.

6. Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite qui tend vers zéro, étudier la suite suivante définie par récurrence: $u_{n+1} = \sin(u_n) + \varepsilon_n$.

(Commencer par montrer que $|u_n| < \pi/2$ à partir d'un certain rang)

Références: de cours avec des exemples corrigés

- [R1], Rudin, Principes d'Analyse Mathématique.
- [TM], Tissier & Mialet, Analyse à une variable réelle.
- [ZQ], Zuily-Queffelec, Eléments d'Analyse pour l'Agrégation.