Splines cubiques

Soit $u \in C^2([0,1],\mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}$, $x_i = ih$, $0 \le i \le N+1$, $h = \dfrac{1}{N+1}$, $\mathbb{P}_k$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus k. On va approcher u par une fonction spline $s = s_h \in C^2$, cubique par morceaux, qui interpole u aux points x_i. On va d'abord démontrer le

Théorème 1 *Il existe une et une seule fonction $s = s_h : [0,1] \to \mathbb{R}$, telle que*

- $s \in C^2([0,1],\mathbb{R})$
- $s \in \mathbb{P}_3^{pm} = \{v : [0,1] \to \mathbb{R},\ v_{|[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3,\ i = 0,\cdots,N\}$,
- $s(x_i) = u(x_i)$, $i = 0,\cdots,N+1$,
- $s'(0) = u'(0)$, $s'(1) = u'(1)$.

1. Existence, unicité de la spline cubique:

   (a) Soit p_i, $i = 1,\cdots,N$, des paramètres réels quelconques. Montrer qu'il existe une unique fonction $w : [0,1] \to \mathbb{R}$, telle que
   - $w \in C^1([0,1],\mathbb{R})$
   - $w \in \mathbb{P}_3^{pm} = \{v : [0,1] \to \mathbb{R},\ v_{|[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3,\ i = 0,\cdots,N\}$,
   - $w(x_i) = u(x_i)$, $i = 0,\cdots,N+1$,
   - $w'(0) = u'(0)$, $w'(1) = u'(1)$.
   - $w'(x_i) = p_i$, $i = 1,\cdots,N$.

   (b) Soit $r \in \mathbb{P}_3$ montrer que:

   $$\begin{aligned} r''(x_i) &= \frac{6}{h^2}[r(x_{i+1}) - r(x_i)] - \frac{2}{h}[r'(x_{i+1}) + 2r'(x_i)], \\ r''(x_{i+1}) &= \frac{6}{h^2}[r(x_i) - r(x_{i+1})] + \frac{2}{h}[r'(x_i) + 2r'(x_{i+1})]. \end{aligned}$$

   (c) En déduire le théorème 1, i.e. pour avoir $w \in C^2$, il n'y a qu'un seul choix possible des paramètres p_i donnés par le système linéaire:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} = \frac{3}{h} \begin{pmatrix} u(x_2) - u(0) \\ u(x_3) - u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) \\ \vdots \\ u(1) - u(x_{N-1}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u'(0) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ u'(1) \end{pmatrix}.$$

2. Meilleure approximation pour la moyenne quadratique de la dérivée seconde:
   On démontrera et donnera une interprétation des résultats suivants:

(a) pour tout $r \in S_h = C^2 \cap \mathbb{P}_3^{pm}$: $\displaystyle\int_0^1 (u-s)''(x) r''(x) dx = 0$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 [u''(x)]^2 dx = \int_0^1 [(u-s)''(x)]^2 dx + \int_0^1 [s''(x)]^2 dx$.

(c) Soit $U = \{v \in C^2([0,1]), v(x_i) = u(x_i), i = 0, \cdots, N, v'(0) = u'(0), v'(1) = u'(1)\}$, on a: $\displaystyle\int_0^1 [s''(x)]^2 dx = \inf_{v \in U} \int_0^1 [v''(x)]^2 dx$.

(d) Sur $S_h = C^2 \cap \mathbb{P}_3^{pm}$, on a: $\displaystyle\int_0^1 [(u-s)''(x)]^2 dx = \inf_{r \in S_h} \int_0^1 [(u-r)''(x)]^2 dx$.

3. Estimation de l'erreur: $u \in C^4([0,1])$ dans cette question.

(a) Soit q_h le vecteur de composantes $(s''(x_i))_{i=0}^{N+1}$, calculer les composantes de $B_h q_h$ en fonction des valeurs de $u(x_i)$, $u'(0)$, $u'(1)$. B_h est la matrice d'ordre $N+2$ suivante:

$$B_h = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Soit q le vecteur de composantes $(u''(x_i))_{i=0}^{N+1}$, montrer qu'il existe une contante C telle que: $\|B(q-q_h)\|_\infty \leq Ch^2 \|u^{(4)}\|_{\infty,[0,1]}$.

(c) * Montrer que $|||B|||_\infty^{-1}$ est bornée indépendamment de h.

(d) En déduire que $\|q - q_h\|_\infty \leq Dh^2$ pour une certaine constante D.

(e) En déduire qu'il existe des constantes C_2, C_1, C_0 telles que:

$$\begin{aligned} \|(u-s_h)''\|_{\infty,[0,1]} &\leq C_2 h^2 \|u^{(4)}\|_{\infty,[0,1]} \\ \|(u-s_h)'\|_{\infty,[0,1]} &\leq C_1 h^3 \|u^{(4)}\|_{\infty,[0,1]} \\ \|s-s_h\|_{\infty,[0,1]} &\leq C_0 h^4 \|u^{(4)}\|_{\infty,[0,1]}. \end{aligned}$$

Comparer avec les majorations obtenues par le polynôme d'interpolation cubique par morceaux.

Références: de cours avec des exemples corrigés

- [C], Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. p. 66-67, 56-57.

- [CMT], Ciarlet, Miara & Thomas, Exercices d'analyse numérique matricielle et d'optimisation. p. 53-55.

- [S], Schatzmann, Analyse numérique, une approche mathématique.