$\mathbb{R}$: inf, sup, $\overline{\lim} = \limsup, \ldots$

$\limsup u_n = \inf_n \sup_{k>n} u_n$, $\liminf u_n = \sup_n \inf_{k>n} u_n$,

$\limsup_{x\to a} f(x) = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{|x-a|<\varepsilon} f(x)$, $\liminf_{x\to a} f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \inf_{|x-a|<\varepsilon} f(x)$.

1 Suites sous-additives

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle pour tout couple d'entier (n,p) on a $u_{n+p} \leq u_n + u_p$.

1. Soit $p > 0$ quelconque, à l'aide de la division euclidienne de n par p, montrer que $\limsup \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_p}{p}$.

   Solution: $n = bp + r$, $b = b_n \sim n/p$, $u_n \leq bu_p + u_r$. Soit $M = \max_{0\leq r<p} u_r$, on a $u_n/n \leq b/nu_p + u_r/n$ donc $\limsup u_n/n \leq u_p/p + 0$.

   En déduire que $\frac{u_n}{n}$ converge vers $\inf_{p>0} \frac{u_p}{p}$.

   Solution: L'inégalité précédente est vraie pour tout $p > 0$ donc $\limsup u_n/n \leq \inf_{p>0} u_p/p$. Or on a toujours $\inf a_n \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n$. Avec $a_n = u_n/n$ on a donc $\inf a_n = \liminf a_n = \limsup a_n$ et $\lim a_n = \inf a_n$.

2. Application: A est une matrice carrée à coefficients réels, et $\|.\|$ une norme matricielle alors $\|A^n\|^{1/n}$ converge vers $\inf_{p>0} \|A^p\|^{1/p}$.

   Piste: *Soit $V_n = \|A^n\| \geq 0$, $V_{n+p} \leq V_n V_p$. S'il existe $p > 0$ tel que $A^p = 0$ (le cas nilpotent) alors $V_n \equiv 0$ pour tout $n \geq p$ et le résultat est vrai.*
   Sinon, $V_n > 0$ pour tout n et $v_n = \ln(V_n)$ est sous-additive ...

2 Morphismes monstrueux

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(1) = 1$ et $f(\sqrt{2}) = 1$.

1. Vérifier que f est $\mathbb{Q}$ linéaire et qu'elle existe bien.

   Piste: *Par l'équation fonctionnelle, f est $\mathbb{Z}$ linéaire puis $\mathbb{Q}$ linéaire, elle est donc déterminée sur une base de Hamel, par exemple $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, e, \cdots\}$*

2. Montrer que $\overline{\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.
   (Les sous groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont ou bien discret ($a\mathbb{Z}$) ou bien dense dans $\mathbb{R}$).

   Piste: *On ne peut avoir $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$, sinon $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.*

3. En déduire que pour tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, $\sup f(I) = +\infty$, et $\overline{f(I)} = \mathbb{R}$.

   Piste: *Prenons $0 \in I$. (On peut toujours si ramener par translation). Sur $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$, $f(x_{n,p}) = n + p$, avec $x_{n,p} = n + \sqrt{2}p$ et $y_k = x_{n(k),p(k)} \to 0$. Ainsi $y_k \in I$ pour k assez grand et et forcément $(n(k))_k$ est non bornée (sinon $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, en effet on pourrait extraire une suite stationnaire de $n(k)$ et on aura $N + \sqrt{2}p(k) = o(1)$, ainsi $p(k)$ est aussi stationnaire ...). Quitte à changer $n(k)$ en*

$-n(k)$ quand il faut on peut supposer $n(k)>0$ qui tend vers $+\infty$ (extraction de sous-suite). Ainsi $p(k)\sim -n(k)/\sqrt{2}$, et $f(y_k)\sim an(k)$ avec $a=1-1/\sqrt{2}>0$, donc on a $\sup_I f=+\infty$.
Prendre $-y_k$ pour avoir l'autre infini: $\inf f(I)=-\infty$.
Soit $z_k=y_k/n(k)\to 0$ et $r\in\mathbb{Q}$, alors $rz_k\in\mathbb{Q}+\sqrt{2}\mathbb{Q}$ et $f(rz_k)\to ra$ CQFD.
Remarque: si $f(1)=1$ et $f(\sqrt{2})\neq\sqrt{2}$alors f est un monstre.

3 Fonction s.c.i. (semi-continue inférieurement)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, s.c.i., c'est à dire que pour tout a, on a $\liminf_{x\to a} f(x)\geq f(a)$.

1. Vérifier que les fonctions suivantes sont s.c.i: une fonction continue, l'indicatrice d'un intervalle ouvert, le sup de fonctions s.c.i.

   Piste: *Si f est continue: $\liminf_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} f(x)=f(a)\geq f(a)$.*
   Pour l'indicatrice de $]a,b[$, il suffit de regarder en a où l'on obtient $\liminf_{x\to a} f(x)=0=f(a)$.
   Soit $F(x)=\sup_n f_n(x)$, f_n sci.
   On a "$\sup\inf\leq\inf\sup$", (le col)
   en effet, $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0$, $\sup_x\inf_y g(x,y)\leq\inf_y[g(x_0,y)]+\varepsilon\leq\inf_y[\sup_x g(x,y)]+\varepsilon,\ldots$
   On a aussi plus facilement "$\sup\sup=\sup\sup$"
   ($\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0$, $\sup_x\sup_y g(x,y)\leq\sup_y[g(x_0,y)]+\varepsilon\leq\sup_y[\sup_x g(x,y)]+\varepsilon$,
   ainsi $\sup_x\sup_y g(x,y)\leq\sup_y\sup_x g(x,y)$ et on conlue par symétrie) donc

$$\begin{aligned}\liminf_{x\to a} F(x) &= \sup_{\varepsilon>0}\inf_{|x-a|<\varepsilon}\sup_n f_n(x)\\ &\geq \sup_{\varepsilon>0}\sup_n\inf_{|x-a|<\varepsilon} f_n(x)=\sup_n\sup_{\varepsilon>0}\inf_{|x-a|<\varepsilon} f_n(x)\geq\sup_n f_n(a)=F(a).\end{aligned}$$

2. Montrer que : $\forall a,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0, |x-a|<\eta\Rightarrow f(a)-\varepsilon\leq f(x)$.

   Piste: *Remplacer ε par η dans la définition de la $\liminf$: soit $\varepsilon>0$, $\exists\eta_0$,*
   $f(a)\leq\liminf_{x\to a} f(x)=\sup_{\eta>0}\inf_{|x-a|<\eta} f(x)\leq\varepsilon+\inf_{|x-a|<\eta_0} f(x)\leq\varepsilon+f(x)$ pour $|x-a|<\eta_0\ldots$
   Remarque: on voit en fait que la $\liminf_a f=f(a)$ pour une fonction s.c.i.
   En fait d'une part certains auteurs considèrent des limites épointées ($x\neq a$) et dans ce cas on peut avoir l'inégalité stricte (indicatrice de $\mathbb{R}^*$), d'autre part pour la réciproque il est plus simple parfois de démontrer l'inégalité au lieu de l'égalité.

3. Montrer que toute fonction s.c.i. admet un minimum sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.

   Piste: *f est localement minorée sur un compact ...*

4. Le temps de vie $T(x_0)$ de la solution d'une équation différentielle de condition initiale x_0 vérifie que pour tout $T<T(x_0)$, il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $y_0\in V$, $T(y_0)>T$.
   Montrer que $T(.)$ est s.c.i.

   Piste: *$T(.)$ vérifie le 2. qui caractérise les fcts sci.*

fo **Références:** de cours avec des exemples corrigés

- [R1], Rudin, Principes d'Analyse Mathématique.
- [TM], Tissier & Mialet, Analyse à une variable réelle.
- [ZQ], Zuily-Queffelec, Eléments d'Analyse pour l'Agrégation.