Quelques applications des formules de Taylor

1 À savoir

1. Savoir distinguer les différentes formules de Taylor :
   (a) Taylor-Young : minimum d'hypothèses et seulement valable localement.
   (b) inégalité de Taylor-Lagrange : le plus utilisée, formule globale.
   Attention l' égalité de Taylor-Lagrange n'est pas valable pour les fonctions à valeurs complexes ou vectorielles.
   (c) La formule de Taylor avec reste intégrale est la plus précise.
2. Savoir écrire un DL d'une fonction à deux ou plusieurs variables.

2 Premiers exemples

Existence de DL, calcul de limites (règle de l'Hospital), factorisation de fonction, analyse numérique élémentaire : suites récurrentes, Newton, consistance de méthodes aux différences finies, ... ; géométrie et optimisation : études de points critiques d'une fonction, position d'un graphe par rapport à sa tangente (son plan tangent), études locales de courbes, convexité, lemme de Morse*, ...

3 Quelques développements possibles

1. Intégration numérique : avec Taylor-Lagrange majoration de l'erreur de la méthode, avec Taylor avec reste intégrale estimation précise de l'erreur.
2. Méthode de Laplace : traiter d'abord le cas sans reste, puis utiliser Taylor et un changement de variable pour se ramener au cas précédent.
   Exemple : la formule de Stirling avec la fonction Γ d'Euler.
   Dans le même ordre d'idée on peut proposer un lemme de la phase stationnaire.
3. Théorème de Bernstein sur le développement de fonctions en série entière. Cet exemple est souvent proposé, mais personne ne m'a donné une application vraiment intéressante de ce résultat, seulement l'exemple de sin et tan.

4 Quizz

1. DL à l'ordre 3 en $(0,0)$ de $\sin(xy)$.
2. Si $f(z) = 0$ et s'il existe n tel que $f^{(n)}(z) \neq 0$ alors z est un zéro isolé de f.
3. Si $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f(0) = 0$ alors $\dfrac{f(x)}{x}$ est aussi dans $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. (sinus cardinal)
4. Soit x_n la solution de l'équation $x^n = e^x$ pour $n \geq 3$ et $1 < x < e$, alors x_n admet un développement asymptotique en puissance de $1/n$ à tout ordre.