# Approximations de solutions de $F(X) = 0$

Soit $d \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

## 1 En dimension 1: $f(x) = 0$

1. Si $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$, $f(0) < 0 < f(1)$, montrer que l'algorithme de dichotomie fournit le développement en base 2 d'une racine $\xi$ de $f$.

2. Le nombre d'or $\varphi$ est la plus grande solution de $x^2 = x + 1$. En posant $g_1(x) = x^2 - 1$, $g_2(x) = 1 + 1/x$, $g_3(x) = \sqrt{x+1}$, montrer que $\varphi = g_k(\varphi)$,$k = 1,2,3$ et que les méthodes de point fixe $x_{n+1} = g_k(x_n)$, $x_0 = 1$ ne converge vers $\varphi$ que dans deux cas.

3. * Méthode de la sécante: $f(\xi) = 0$, $f'(\xi) \neq 0$, $x_0 \simeq \xi$, étudier la convergence de la suite: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{p_n}$ où $p_n = \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$.

## 2 Utilisation de Méthodes de point fixe dans $\mathbb{R}^d$.

Soit $B \in Gl_d$, on pose $G(X) = X - BF(X)$ et $A = DF(\Xi)$.

1. Montrer que $F(\Xi) = 0$ si et seulement si $G(\Xi) = \Xi$

2. Montrer que si $|||DG(\Xi)||| < 1$, ou le rayon spectral $\rho(DG(\Xi)) < 1$, alors la suite définie par récurrence: $X_{n+1} = G(X_n)$ converge vers $\Xi$ si $X_0$ est assez proche de $\Xi$.

3. Si $A$ est une matrice symétrique définie positive, montrer que l'on peut prendre pour $B$ la matrice d'une homothétie simple à calculer pour avoir $\rho(DG(\Xi)) < 1$.

## 3 Méthode de Newton dans $\mathbb{R}^d$.

On suppose que $F \in C^3$, $F(\Xi) = 0$ et $A = DF(\Xi) \in Gl_d(\mathbb{R})$.
La méthode de Newton consiste à partir d'un point $X_0$ (proche de $\Xi$), de linéariser en $X_0$: $F(X_0 + H) = L(H) + O(\|H\|^2)$ avec $L(H) = F(X_0) + DF(X_0)H$, de négliger le reste d'ordre 2, de résoudre $L(H) = 0$, de poser $X_1 = X_0 + H$ et d'itérer le procédé.

1. Montrer que la méthode de Newton se ramène à utiliser la suite récurrente $X_{n+1} = G(X_n)$ avec $G(X) = X - [DF(X)]^{-1}F(X)$.

2. Vérifier que $G$ est bien définie et $C^2$ sur un voisinage $V$ de $\Xi$.

3. A l'aide d'un D.L. montrer que $DG(\Xi) = 0$, en déduire que la méthode converge quadratiquement vers $\Xi$ pour toute condition initiale assez proche de $\Xi$.

**Références:** de cours avec des exemples corrigés


- [Dem], Demailly, Analyse numérique & équations différentielles.

- [R], Rouvière, PGCD.