$\mathbb{R}$: sous-groupes additifs, $\limsup$

1 Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$, $G^+ = G \cap]0,+\infty[\neq \emptyset$, $m = \inf G^+$.

1. Montrer que si $m > 0$ alors $G = m\mathbb{Z}$, sinon $\overline{G} = \mathbb{R}$.

2. En déduire que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est discret si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$.
   Obtenir $Ad[u_n] = \cap_n \overline{\cup_{k>n}\{u_k\}}$ l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $u_n = \sin n$.

3. L'ensemble G des périodes d'une fonction périodique f est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
   • Si $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, montrer que : $m > 0$ si et seulement si f n'est pas constante.
   • Existe-il une fonction périodique non constante telle que $m = 0$?

2 $\limsup$

Soient $(u_n)_n$ une suite réelle et $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ la droite numérique achevée. On pose $\limsup u_n = \inf\limits_n \sup\limits_{k\geq n} u_k$ et $\liminf u_n = \sup\limits_n \inf\limits_{k\geq n} u_k$.

1. Vérifier certaines des propriétés utiles suivantes:

   (a) $v_n = \sup\limits_{k\geq n} u_k$ et $t_n = \inf\limits_{k\geq n} u_k$ sont monotones et que $t_n \leq u_n \leq v_n$.

   (b) $(u_n)_n$ est majorée dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\limsup u_n < +\infty$.

   (c) Si $\limsup u_n \in \mathbb{R}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, $u_n < \limsup_n + \varepsilon$ à partir d'un certain rang.

   (d) $\limsup u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(u_n)_n$, i.e.:
   $\limsup u_n = \sup Ad[u_n] = \max Ad[u_n]$,
   et $\{\liminf u_n, \limsup u_n\} \subset Ad[u_n] \subset [\liminf u_n, \limsup u_n]$.

   (e) Si $\liminf u_n = \limsup u_n$ alors $(u_n)_n$ converge.

   (f) $\lim u_n = 0$ si et seulement si $\limsup |u_n| = 0$.

   (g) $\limsup(u_n + v_n) \leq \limsup u_n + \limsup v_n$,
   si de plus $(u_n)_n$ converges alors $\limsup(u_n + v_n) = \lim u_n + \limsup v_n$.

   (h) Si $(u_n)_n$ est bornée et si $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est croissante alors $\limsup f(u_n) = f(\limsup u_n)$.

2. Montrer que si $\limsup |u_n|^{1/n} < r$, alors $(u_n)_n = O(r^n)$. Enoncer une réciproque.

3. Généraliser la notion de $\limsup$ pour les fonctions puis calculer la $\limsup\limits_{+\infty} \sin(x)$, $\limsup\limits_{+\infty} -\sin(x)$, $\limsup\limits_{0} \sin(1/x)$, $\limsup\limits_{+\infty} \left[\sin(x) + \cos(\sqrt{2}x)\right]$.

Références: de cours avec des exemples corrigés

- [R1], Rudin, Principes d'Analyse Mathématique.
- [TM], Tissier & Mialet, Analyse à une variable réelle.
- [ZQ], Zuily-Queffelec, Eléments d'Analyse pour l'Agrégation.