Méthodes directes de résolution de $AX = B$, $A \in GL_N(\mathbb{R}), B, X \in \mathbb{R}^N$.

1 A triangulaire

1. Dans le cas d'une matrice triangulaire supérieure, écrire l'algorithme de remontée pour résoudre $AX = B$.
2. Donner un équivalent du nombre d'opérations nécessaires pour résoudre $AX = B$ quand $N \to +\infty$.
3. Implémenter et tester l'algorithme sous Scilab.
4. Faire de même dans le cas d'une matrice triangulaire inférieure.
5. Donner le coût du calcul de A^{-1}.

2 Méthode de Gauss

1. Ecrire l'algorithme de la méthode de Gauss de résolution du système linéaire $AX = B$.
2. Donner le coût de la résolution de $AX = B$.
3. Donner le coût du calcul de A^{-1} par cette méthode.
4. Implémenter la méthode de Gauss sur ordinateur.

3 $PA = LU$

Soit $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker qui est tout le temps nul sauf pour $i = j$, $\delta_{i,i} = 1$.
On note, pour $p, q \in \{1, \cdots, N\}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, τ la transposition de $\{1, \cdots, N\}$ qui permute p et q, $T^{p,q}$ et pour $p < q$, $L^{p,q,\alpha}$ les matrices de $GL_N(\mathbb{R})$ définies par:

$$\begin{aligned} T^{p,q}_{i,j} &= \delta_{\tau(i),j} \\ L^{p,q,\alpha}_{i,j} &= \delta_{i,i} + \alpha\delta_{i,q}\delta_{j,p} \end{aligned}$$

1. Calculer $T^{p,q}A$ et $L^{p,q,\alpha}A$. Interpréter le résultat obtenu.
2. En déduire $(T^{p,q})^2$, $(T^{p,q})^{-1}$, $(L^{p,q,\alpha})^{-1}$.
   $L_p = L^{p,p+1,\alpha_{p+1}} L^{p,p+2,\alpha_{p+2}} \dots L^{p,N,\alpha_N}$.
   Expliciter L'_p tel que $L_p T^{p,q} = T^{p,q} L'_p$.
   (On pourra écrire que $L_k = Id + l\, {}^t e_k$ avec $l, e_k \in \mathbb{R}^N$, $(e_k)_i = \delta_{k,i}$).
3. En déduire que A peut s'écrire sous la forme $L_{N-1}T_{N-1} \cdots L_2T_2L_1T_1A = U$, où U est triangulaire supérieure, T_i est une matrice T^{i,q_i} et L_i est de la forme précédente.

4. En déduire que , il existe une matrice de permuation P, une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité tel que: $PA = LU$.

5. Si de plus, la matrice est *régulière* i.e:
   $\det[A_{ij}]_{1\leq i,j\leq k} \neq 0$ pour $k = 1, 2, \cdots, N$,
   alors on peut prendre $P = Id$ et dans ce cas la factorisation est unique.

6. Montrer que dans $GL_N(\mathbb{R})$ presque toutes les matrices sont régulières.

7. application: Comment résoudre $AX = B$ connaissant la factorisation de A: $PA = LU$ et ayant à notre dispostion les algorithmes de remontée de de descente pour les systèmes triangulaires.

8. Quel est l'intérêt (et la différence) entre la méthode de factorisation $PA = LU$ et la méthode d'éliminitaion de Gauss pour résoudre $AX = B$?

9. Calculer le coût de résolution de $AX = B$.

4 Choleski: $0 < A = C\,{}^tC$

On suppose A symétrique définie positive et on cherche C triangulaire inférieure dont tous les éléments diagonaux sont strictements positifs: $C_{ii} > 0$.

1. Ecrire le système d'équations que sastisfont les coefficients de C.

2. En déduire un algorithme de calcul des coefficients de C, par identification..

3. Montrer que C est unique.

4. Appliquer cette factorisation à la résolution du problème modèle.

5. Plus généralement, montrer que que si l'on dispose d'un algorithme efficace pour résoudre $AX = B$ avec $0 < A = {}^tA$, alors on peut résoudre $AX = B$ pour une matrice inversible quelconque. (Utiliser $M = {}^tAA$).

5 Autres méthodes

D'autres méthodes sont trés utilisées. Vous pouvez les trouver dans $[LT]$.

1. La méthode QR qui utilise la factoriastion $A = QR$ avec $Q\,{}^tQ = Id$ et R triangulaire.

2. La méthode du gradient conjugué qui est très souvent utilisés comme une méthode itérative en ne terminant pas l'algorithme

6 Un problème modèle

Pour résoudre l'équation de Laplace :

$$-u''(x) = f(x), \qquad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0, \tag{1}$$

on pose $h = \frac{1}{N+1}$, $x_j = jh$, $f_j = f(x_j)$, $u_j \simeq u(x_j)$, $j = 0, \cdots, N+1$. On cherche à résoudre :

$$Au_h = h^2 f_h \tag{2}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}, \quad f_h = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix} \tag{3}$$

1. Montrer que A est symétrique, définie, positive et régulière.
2. Résoudre le système linéaire (2) à l'aide de Scilab . Pour la résolution du système linéaire on testera différentes méthodes : Gauss, LU, Choleski , ...
3. Comparer graphiquement et numériquement avec la solution exacte de (1) (avec $f \equiv 1$ par exemple résoudre explicitment l'équation de Laplace).

Références :

- $[C]$, Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation,
- $[E]$, Euvrard, Résolution numérique des équations aux dérivées partielles,
- $[LT]$, Lascaux & Théodor, Analyse numérique matricielle appliquée è l'art de l'ingénieur,
- $[RT]$, Rabier & Thomas, Exercices d'analyse numérique ...
- $[S]$, Schatzman, analyse numérique : cours et exercices pour la licence,