# “Résolutions” d’équations différentielles

## 1 Equation ou système linéaire

1. Soit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, Trouvez $(x(t), y(t))$, la solution de $\left\{ \begin{array}{ll} x'(t) = x(t) + y(t) + \exp(2t) + 1, & x(0) = x_0 \\ y'(t) = x(t) + y(t) + \exp(2t) - 1, & y(0) = y_0 \end{array} \right.$ .
2. Donner une méthode **explicite** , simple, pour calculer une solution $X'(t) = AX(t) + \exp(\lambda t)t^k V$, $A \in M_N(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, $V \in \mathbb{C}^N$.
3. Résoudre $t^2(1-t^2)x''(t) + t^3 x'(t) - 2x(t) = 0$ en remarquant que $t \mapsto t^2$ est une solution et en appliquant la méthode de la variation de la constante.

## 2 Equations à variables séparées

1. Résoudre $\frac{dx}{dt} = x^2(t)$ et $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$ en fonction de $x(0), y(0) \in \mathbb{R}$.
2. Justifier la méthode de résolution des équations à variables séparées de la forme : $\frac{dx}{dt} = f(t)g(x)$
3. Représenter graphiquement la solution maximale de $\frac{dx}{dt} = \ln x$ avec $x(0) = x_0 \in ]0,1[$.

## 3 Bernouilli, Ricatti, équation homogène

1. Bernouilli : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, cherchez les solutions de $x'(t) = x(t) + tx^{\alpha}(t)$
   ( poser $y(t) = x(t)^{1-\alpha}$ si $\alpha \neq 1$).
2. Ricatti : Trouver toutes les solutions de $(1-t^3)x'(t) + t^2 x(t) + x^2(t) = 2t$
   ( poser $x(t) = t^2 + y(t)$ puis se ramener à “Bernouilli”).
3. Equation homogène : Résoudre $tx'(t)(2x(t) - t) = x^2(t)$ en posant $x(t) = ty(t)$.

## 4 Résolution explicite du portrait de phase

1. Soit $x$ un solution de $\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -\frac{dV}{dx}(x(t))$. Montrez que $\frac{x'^2(t)}{2} + V(x(t))$ est indépendant de $t$.
   Représenter les solutions des équations suivantes dans le plan $(x, x')$: $x'' + ax = 0$; $x'' + \sin(x) = 0$.
   Pouvez vous expliquer le comportement des solutions en fonction du graphe de $x \mapsto V(x)$?
2. Soit $(x,y) \mapsto H(x,y) \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, et $(x(t), y(t))$ solution de : $\frac{dx}{dt} = -\frac{dH}{dy}(x,y)$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dH}{dx}(x,y)$. Montrez que $H(x(t), y(t))$ est indépendant de $t$. Montrez que l’équation $x'' = -V'(x)$, est de cette forme en posant $y = x'$;
3. Montrez que le système de Lotka-Volterra: $x' = x(1-y), y' = -y(1-x)$, $x > 0, y > 0$, admet une intégrale première ( écrire l’equation vérifée par $\frac{dy}{dx}$).