Calculs de valeurs approchées d'une intégrale

Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N} - \{0\}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + ih$ pour $i = 0, 1, \ldots, N$ et $\mathbb{P}_d$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à d. f et φ seront toujours supposées de classe C^∞.

1 Méthode de quadrature composée (MQC)

On choisit une formule de quadrature élémentaire (FQE) sur l'intervalle $[0,1]$ à $l+1$ points associées aux points $\tau_j \in [0,1]$, $j = 0, 1, \ldots, l$ et aux poids ω_j tel que :

$$\int_0^1 \varphi(t)dt \simeq \sum_{j=0}^{l} \omega_j \varphi(\tau_j) \quad , \quad \sum_{j=0}^{l} \omega_j = 1 \tag{1}$$

La FQE est dite d'ordre d si $\forall \varphi \in \mathbb{P}_d$, l'erreur élémentaire $e(\varphi) = \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)dt - \sum_{j=0}^{l} \omega_j \varphi(\tau_j) = 0$.
Par changement de variable affine (de $[0,1]$ sur $[\alpha,\beta]$ ...), on en déduit les formules formelles :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \simeq (\beta-\alpha) \sum_{j=0}^{l} \omega_j f(\alpha + (\beta-\alpha)\tau_j) \tag{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq Q_N(f) = h \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{l} \omega_j f(x_i + h\tau_j) \tag{3}$$

On notera $e_i(f) = \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - h \sum_{j=0}^{l} \omega_j f(x_i + h\tau_j)$ et $E_N(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx - Q_N(f)$.

1. Faites le calcul qui donne (2) puis la MQC (3).
2. Montrer que si les poids sont positifs: $\omega_j \geq 0$ et si f est seulement continue. alors $\lim_{N\to\infty} E_N(f) = 0$.

2 Erreur d'une MQC d'ordre d avec l'inégalité de Taylor-Lagrange

1. Montrer: $\exists C \geq 0$ / $|e(\varphi)| \leq C \sup_{\xi \in [0,1]} |\varphi^{(d+1)}(\xi)|$
2. En déduire que $e_i(f) = O(h^{d+2})$ puis que $E_N(f) = O(h^{d+1})$.

3 Erreur d'une MQC d'ordre d avec "Taylor-reste-intégrale"

1. Formule de la moyenne : Montrer que si $k(.)$ est une fonction continue par morceau et de signe constant sur $[\alpha,\beta]$, $\psi \in C^0([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ et si $\xi_i \in [\alpha,\beta]$, $\quad i=1,\ldots,N$,
   alors il existe $\delta,\gamma \in [\alpha,\beta]$ tel que $\displaystyle\int_\alpha^\beta \psi(x)k(x)dx = \psi(\delta)\int_\alpha^\beta k(x)dx$ et $\displaystyle\psi(\gamma) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi(\xi_i)$.

2. ♠ Démontrer que $\displaystyle e(\varphi) = \int_0^1 \varphi^{(d+1)}(t)k(t)dt$ où $\displaystyle k(t) = \frac{(1-t)^{d+1}}{(d+1)!} - \sum_{j=0}^{l}\omega_j\frac{[\max(\tau_j - t,0)]^d}{d!}$,
   (convention : $0^0 = 0$).

3. Soit $\displaystyle K = \int_0^1 k(t)dt$. Montrer que si $k(.)$ est de signe constant sur $[0,1]$ alors :
   $\exists \eta \in [0,1],\ \xi_i \in [x_i,x_{i+1}],\ \xi \in [a,b]$ tel que $e(\varphi) = K\varphi^{d+1}(\eta)$, $e_i(f) = h^{d+2}Kf^{d+1}(\xi_i)$, et
   $$E_N(f) = h^{d+1}Kf^{d+1}(\xi)(b-a) \tag{4}$$

4 Méthode des rectangles : $l=0,\ \tau_0=0$

Montrer que la MQC est : $\displaystyle h\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)$, puis que $E_N(f) = O(h) = \frac{1}{2}hf'(\xi)(b-a),\ \xi \in [a,b]$.
Cette méthode est-elle d'ordre 1 ?

5 Méthode des trapèzes :$l=1,\ \tau_0=0,\ \tau_1=1$

Trouver la FQE d'ordre 1 associée à ces points. En déduire que :
$\displaystyle Q_N(f) = h\sum_{i=0}^{N-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$, puis que $\displaystyle E_N(f) = O(h^2) = \frac{-1}{12}h^2f''(\xi)(b-a),\ \xi \in [a,b]$.

6 Méthode de Simpson :$l=2,\ \tau_0=0,\ \tau_1=0,5,\ \tau_2=1$

Trouver la FQE d'ordre 2 associée à ces points. Est elle d'ordre 3? Puis Montrer que : $\exists \xi \in [a,b]$,
$$\int_a^b f(x)dx - \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{N-1}\left(f(x_i) + 4f\left(x_i+\frac{h}{2}\right) + f(x_{i+1})\right) = O(h^4) = \frac{-1}{2880}h^4f^{(4)}(\xi)(b-a).$$

7 Méthode du point milieu

Montre que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i+\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{24}h^2f''(\xi)(b-a),\ \xi \in [a,b]$.

Références : Baranger; Crouzeix-Mignot; J.P. Demailly;